专著 西北工业大学 出版基金 资助项目 ZIZHU XIANGMU

ZHUANZHU

# 拟齐性偏微分算子的分析

罗学波 钮鹏程 韩亚洲 著

ZHUANZHU

西北工业大学出版社

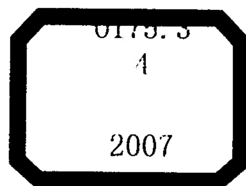
□责任编辑 / 曹　锦
□封面设计 / 高　博

专著 西北工业大学 出版基金 资助项目 ZIZHU XIANGMU

ISBN 978-7-5612-2202-7



定价：15.00元




西北工业大学专著出版基金资助项目

# 拟齐性偏微分算子的分析

罗学波　钮鹏程　韩亚洲　著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本著作由三部分组成. 第一部分 Heisenberg 群上的不变微分算子的分析，内容包括 Heisenberg 群、无穷维酉表示、Kohn-Laplace 算子的基本解、亚椭圆性、谱与特征值. 第二部分拟齐性线性偏微分算子，内容包括拟齐性偏微分算子、Liouville 定理、解析亚椭圆性、多项式解空间、奇点可去性. 第三部分 Greiner 算子的基本解和实解析性.

本著作适用于学习和研究偏微分方程理论的研究生、高校教师和相关领域的数学工作者.


**图书在版编目(CIP)数据**

拟齐性偏微分算子的分析/罗学波，钮鹏程，韩亚洲著. 一西安：西北工业大学出版社，2007.4

ISBN 978-7-5612-2202-7

Ⅰ.拟… Ⅱ.①罗… ②钮… ③韩… Ⅲ.拟微分算子一分析(数学) Ⅳ.O175.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 042943 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072
电 话：(029)88493844 88491757
网 址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西丰源印务有限公司
开 本：850 mm×1 168 mm 1/32
印 张：8.5
字 数：213 千字
版 次：2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷
定 价：15.00 元

# 前 言

自1967年Hörmander提出平方和算子的亚椭圆性准则后，由向量场构成的偏微分方程的研究得到了快速发展. 1970年，Stein在“尼斯国际数学家大会”上提出用群分析研究偏微分方程的一系列思想，有关幂零Lie群上不变微分算子的研究成了新的热点.

在陈庆益教授的倡导下，罗学波教授于1984年开始了幂零Lie群上偏微分方程方向的研究. 我们撰写本著作是总结该研究集体在拟齐性线性偏微分算子方向上的研究成果.

本著作由三部分组成.

第一部分Heisenberg群上不变微分算子的分析，主要取材于罗学波教授于1994年在兰州大学对博士生讲课时，由钮鹏程所做的笔记. 当时听课人中尚有何春雄、张吉慧、马玉兰. 有关谱与特征值的内容取材于罗学波教授和钮鹏程的论文.

第二部分拟齐性线性偏微分算子，主要取材于罗学波教授于2003年在西北工业大学为博士生讲课时，由博士生所做的笔记. 听课人中除韩亚洲、秦英、刘海峰外，还有韩军强、陈艳霞、原子霞、窦井波及钮鹏程. 此外，这部分内容中还加入了常系数LPDO的Liouville性质，拟齐性LPDO对应的非线性方程的Liouville定理等.

第三部分主要介绍Greiner算子. 该算子为一个特殊的拟齐性LPDO. Greiner算子的基本解和实解析性的研究为罗学波教授在加拿大Torento大学访问Greiner教授时所做的工作，原商定由他们共同发表该工作成果，但后来Greiner，Beals，Gaveau

在此基础上对一般的 $n$ 维情形进行了研究，并将成果发表. 因此，我们在出版本著作之际，发表罗学波教授的研究成果，从中可见其深厚功力和原创精神.

罗学波教授生前早有撰写、出版专著之意，只因工作繁忙，久未如愿. 我们做此工作，也算了却恩师一桩遗愿. 本著作的整理（部分内容改写或重写）、扩充和最终完成得到了罗学波教授的夫人方珍珍教授的大力支持和热情鼓励，本著作作者署名为罗学波、钮鹏程、韩亚洲也得到方珍珍教授的许可. 另外，在本著作书稿准备过程中，得到刘海峰和原子霞的大力帮助，在此表示衷心的感谢. 陕西师范大学的吴建华教授和西北工业大学的丁晓庆教授仔细审阅了书稿并提出了许多宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平所限，书中疏漏和不妥之处，恳请同行、读者指正.

作　者
2006 年 10 月

# 目　录

## 第一部分　Heisenberg 群上不变微分算子的分析


第一章　Heisenberg 群的引入 …… 3

1.1　预备知识 …… 3

1.2　无穷小生成元、光滑向量 …… 7

1.3　Heisenberg 群的概念 …… 17

第二章　Heisenberg 群的表示 …… 21

2.1　Heisenberg 群的表示 …… 21

2.2　卷积代数、函数及分布的表示 …… 26

2.3　Plancherel 等式 …… 33

第三章　Heisenberg 群的 Lie 代数 …… 39

3.1　Lie 代数与光滑向量场 …… 39

3.2　不变微分算子与卷积算子 …… 43

第四章　Kohn-Laplace 算子的基本解 …… 48

4.1　Hermite 函数 …… 49

4.2　求解 …… 50

4.3　基本解的验证 …… 57

4.4 亚椭圆性与局部可解性 …… 61
第五章 Kohn-Laplace 算子的特征值与谱 …… 67
5.1 特征值的存在性与离散性 …… 67
5.2 相邻特征值的估计 …… 71
5.3 Kohn-Laplace 算子的谱 …… 76

# 第二部分 拟齐性线性偏微分算子

第六章 拟齐性偏微分算子的基本性质 …… 91
6.1 伸缩变换 …… 92
6.2 拟齐次函数 …… 98
6.3 拟齐次广义函数(分布) …… 101
6.4 拟齐性 LPDO …… 103
6.5 拟齐次分布的延拓问题 …… 109
6.6 拟齐性偏微分算子的谱性质 …… 118
第七章 拟齐性亚椭圆 LPDO …… 123
7.1 基本概念 …… 123
7.2 基本解 …… 125
7.3 可去奇性定理 …… 131
第八章 拟齐性偏微分算子的 Liouville 型定理 …… 138
8.1 LPDO 的 Liouville 型定理的研究和进展 …… 138
8.2 拟齐性偏微分算子的 Liouville 型定理 …… 140
8.3 常系数 LPDO 的 Liouville 性质 …… 150
8.4 关于多项式性质的若干结果 …… 154
第九章 半线性拟齐性偏微分方程的 Liouville 型定理 …… 158
9.1 半线性拟齐性方程 …… 158
9.2 平方和算子的半线性方程 …… 162

9.3　广义锥域上的 Liouville 型定理 ………… 164

**第十章　解析亚椭圆拟齐性 LPDO** ………… 166

10.1　预备知识 ………… 166

10.2　拟齐性 LPDO 的整解析性 ………… 167

**第十一章　拟齐性 LPDO 在多项式空间的可解性** ………… 174

11.1　问题的提出 ………… 174

11.2　空间 $\mathscr{P}_k$ 和多项式 $e_k(x,\xi)$ ………… 175

11.3　主要定理的证明 ………… 179

11.4　$\mathscr{P}$-可解算子的右逆 ………… 183

# 第三部分　Greiner 算子的基本解和实解析性

**第十二章　基本解的推导** ………… 193

12.1　$-1<\mathrm{Re}\alpha<1$ 的情形 ………… 193

12.2　$|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1(\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2,\cdots)$ ………… 216

**第十三章　基本解的证明和实解析性** ………… 221

13.1　$\mathcal{L}_\alpha$ 和 $\mathbf{K}^{(\alpha)}$ 的一些性质 ………… 221

13.2　当 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 时，基本解的证明 ………… 234

13.3　基本解的实解析性 ………… 251

**参考文献** ………… 258

# 第一部分

# Heisenberg 群上不变微分算子的分析

# 第一章　Heisenberg 群的引入

本章 1.1 节介绍单参数算子群及基本性质；1.2 节介绍无穷小生成元及性质，以及光滑向量场、解析向量等概念；1.3 节从算子群和多复变几何分别导出 Heisenberg 群.

## 1.1　预备知识

### 1.1.1　群

**定义 1.1**　设给定集合 $G$，若给定一个映射：$G\times G\to G$，对任意 $a,b\in G$，存在唯一一个 $c\in G$，使得 $(a,b)\to c$，记为 $c=ab$，称在 $G$ 上定义了乘法. 若其还满足

(1) 结合律：$(ab)c=a(bc)$，$\forall a,b,c\in G$；

(2) 存在 $e\in G$，使 $ea=ae=a$，$\forall a\in G$；

(3) 对任意 $a\in G$，存在 $a^{-1}\in G$，使得 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$；

则称 $G$ 为一个群.

若乘法仅满足(1)，则称 $G$ 为半群.

若乘法还满足交换律 $ab=ba$，则称 $G$ 为交换群，也称 Abel 群.

在交换律中，习惯上记“·”为“+”，即记 $ab$ 为 $a+b$.

**例 1.1**　**R**(实数集)：$x+y$ 构成一个群运算，**R** 为可交换群.

**例 1.2**　$\mathbf{R}^+=\{\lambda\in\mathbf{R}:\lambda>0\}$ 不是一个群，这是由于它的乘法运算不存在逆元. 若定义群运算 $\lambda_1+\lambda_2$，则它满足结合律，$\mathbf{R}^+$ 构成一个半群.

**例 1.3**　$B$ 是一个 Banach 空间，$\mathcal{L}$ 是 $B$ 上所有有界线性算子

的集合.设$A\in\mathcal{L}$,$B\in\mathcal{L}$,定义$A$,$B$为两个算子的合成.$\mathcal{L}$按合成运算不构成群,因合成运算不具逆元,但它是半群.

**定义 1.2** 设$G_1$,$G_2$为两个群,若存在映射$F:G_1\to G_2$,满足

$$F(ab)=F(a)F(b),\quad \forall a\in G_1,b\in G_2$$

则称$F$为一个同态.

若$F$还是一个双射(内射且满射),则称$F$为一个同构.

### 1.1.2 单参数算子群

**定义 1.3** 设$B$为Banach空间,$\mathcal{L}$为$B\to B$的所有线性有界算子的集合,设

(1) $V(t):\mathbf{R}\to\mathcal{L},t\in\mathbf{R}$ ($V(t)$可看做实抽象函数);

(2) $V(t+s)=V(t)V(s)$ (说明$V(t)$是$\mathbf{R}\to\mathcal{L}$的同态);

(3) $V(0)=I$ (独立条件,从(1),(2)推不出);

(4) $\lim\limits_{t\to t_0}V(t)u=V(t_0)u,\forall u\in B$ (强连续性);

则称$\{V(t)\}$为$B$上的单参数算子群.

**注 1.1** 若限制$t\geqslant 0$,则称$\{V(t)\}$为$B$上的算子半群.

若对任意$u\in B,v\in B^*$,有

$$(u,V(t)u)\to(u,V(t_0)u)(t\to t_0)$$

则称为弱连续性.

若

$$\|V(t)-V(t_0)\|\to 0(t\to 0)$$

则称为按范数连续性.

**例 1.4** 取$B=L^p(\mathbf{R}),p\geqslant 1$,定义平移变换

$$V(t)=\tau_t:\tau_tf(x)=f(x-t),\quad \forall f\in L^p$$

则$\tau_t$为$B$上的单参数算子群.

**证明** 性质(1)～(3)显然.

对每个$t$,$\|\tau_t\|_p=1$.

对支集位于长为$\frac{1}{2}|t-t'|$的区间中的函数 $f(0\leqslant f\leqslant 1)$，当 $t\neq t'$ 时，得 $\|\tau_t-\tau_{t'}\|_p=2$.

这对验证定义 1.3 中的强连续性(4) 有点影响，现在说明如何做.

因为 $C_0^\infty(\mathbf{R})$ 在每个 Banach 空间 $L^p(\mathbf{R})(1\leqslant p<\infty)$ 中稠密，又若 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，$t_j\to t$，则函数 $\tau_{t_j}f(x)=f(x-t_j)$ 有在固定紧集中的支集，且一致收敛于 $f(x-t)$，所以对每个 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，有在 $L^p$ 模下定义 1.3 中的性质(4) 的收敛性.

该平移变换为强连续性的最终证明由下列引理完成.

**引理 1.1** 设 $T_j, T_0: B_1\to B_2$ 为 Banach 空间之间有界线性算子全体中的一致有界算子，设 $\mathcal{L}$ 为 $B_1$ 的稠密线性子空间，并设

$$T_j u\to T_0 u,\quad j\to\infty, u\in\mathcal{L} \tag{1.1}$$

在 $B_2$ 模下，则式(1.1) 对所有 $u\in B_1$ 也成立.

**证明** 给定 $u\in B_1$，$\varepsilon>0$，取 $v\in\mathcal{L}$，使 $\|u-v\|<\varepsilon$. 设 $\|T_j\|\leqslant M$，对所有 $j$，$\|T_0\|\leqslant M$，则

$$\begin{aligned}
&\|T_j u-T_0 u\|=\\
&\quad\|T_j u-T_j v+T_j v-T_0 v+T_0 v-T_0 u\|\leqslant\\
&\quad\|T_j u-T_j v\|+\|T_j v-T_0 v\|+\|T_0 v-T_0 u\|\leqslant\\
&\quad\|T_j v-T_0 v\|+2M\|v-u\|
\end{aligned}$$

让 $j\to\infty$，则由式(1.1)，有

$$\varlimsup_{j\to\infty}\|T_j u-T_0 u\|\leqslant 2M\varepsilon$$

由于 $\varepsilon$ 任意，故引理得证. 证毕.

注意：

$$\|\tau_{t_1}-\tau_{t_2}\|=2^{\frac{1}{p}},\quad t_1\neq t_2$$

这说明定义 1.3 中的性质(4) 不能换为按范数连续. 事实上，取 $f\in L^p(\mathbf{R})$，则有

$$\|\tau_{t_1}f-\tau_{t_2}f\|_{L^p}=$$

$$\left[\int | f(x-t_1)-f(x-t_2) |^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \xlongequal{\text{(作变量替换)}}$$

$$\left(\int | f(x)-f(x-(t_2-t_1)) |^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

因为 $| a-b |^p \leqslant | a |^p + | b |^p$,所以

$$\| \tau_{t_1} f - \tau_{t_2} f \|_{L^p} \leqslant$$

$$\left[\int [| f(x) |^p + | f(x-(t_1-t_2)) |^p] \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left(2\int | f(x) |^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \| f \|_{L^p}$$

故 $\| \tau_{t_1} - \tau_{t_2} \| \leqslant 2^{\frac{1}{p}}$.

下找 $f \in L^p$,使 $\| \tau_{t_2} f - \tau_{t_1} f \| = 2^{\frac{1}{p}} \| f \|_{L^p}$. 取 $f \in C_0^\infty$, $f \geqslant 0, f \not\equiv 0$;当 $| x | \geqslant \dfrac{| t_2 - t_1 |}{2}$ 时,$f \equiv 0$,则

$$\| \tau_{t_1} f - \tau_{t_2} f \|_{L^p}^p =$$

$$\int | f(x) - f(x-(t_1-t_2)) |^p \mathrm{d}x =$$

$$\int [| f(x) |^p + | f(x-(t_2-t_1)) |^p] \mathrm{d}x =$$

$$\int_{|x| \leqslant \frac{|t_2-t_1|}{2}} | f(x) |^p \mathrm{d}x + \int_{|x| \geqslant \frac{|t_2-t_1|}{2}} | f(x-(t_2-t_1)) |^p \mathrm{d}x =$$

$$\int 2 | f(x) |^p \mathrm{d}x$$

由此证明定义 1.3 中的性质(4) 不能换为按范数连续.

**命题 1.1** 设 $V(t)$ 为 $B$ 上的单参数算子群,则存在 $M, K > 0$,使得

$$\| V(t) \| \leqslant M e^{K|t|}, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

**证明** 取 $u \in B$,则 $\| V(t)u \|$ 是 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的连续函数,特别地,它在$[-1,1]$ 上有界:

$$\| V(t)u \| \leqslant C \| u \|$$

即逐点有界. 由一致有界性定理，$\| V(t) \| \leqslant M, t \in [-1,1]$. 当 $t \in \mathbf{R}$ 时，令 $m = [|t|] + 1$. 有

$$V(t) = V\left(m \cdot \frac{t}{m}\right) = V\overbrace{\left(\frac{t}{m} + \frac{t}{m} + \cdots + \frac{t}{m}\right)}^{m} = \left[V\left(\frac{t}{m}\right)\right]^m$$

因此

$$\| V(t) \| = \left\| \left[V\left(\frac{t}{m}\right)\right]^m \right\| \leqslant \left\| V\left(\frac{t}{m}\right) \right\|^m \leqslant M^m \leqslant M^{|t|+1} = M \cdot \mathrm{e}^{|t| \ln M} = M \cdot \mathrm{e}^{|t| K}$$

这里 $K = \ln M$. 证毕.

## 1.2　无穷小生成元、光滑向量

### 1.2.1　无穷小生成元

**定义 1.4**　设 $B$ 为 Banach 空间，$V(t)$ 为 $B$ 上的单参数算子群，定义线性算子 $A$ 如下：

$$Au = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\varepsilon)u - u}{\varepsilon}, \quad u \in B$$

$A$ 的定义域 $D(A) = \left\{u : u \in B, \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{V(\varepsilon)u - u}{\varepsilon} \text{存在}\right\} \subset B$，称 $A$ 为 $V(t)$ 的无穷小生成元.

**注 1.2**　定义 1.4 中的极限不是总存在，$A$ 不一定有界，通常是无界算子，且是微分算子. 下面证明 $D(A)$ 在 $B$ 中稠密，这说明 $D(A)$ 足够大了.

**引理 1.2**　设 $A$ 是 $V(t)$ 的无穷小生成元，则 $V(t) : D(A) \to D(A)$，且

$$\frac{\mathrm{d}V(t)u}{\mathrm{d}t} = AV(t)u, \quad \forall u \in D(A)$$

**证明** 设 $u \in D(A)$，令 $w_t = V(t)u$，须证 $w_t \in D(A)$，即证 $\frac{V(\varepsilon)w_t - w_t}{\varepsilon}$ 存在极限. 据同态性，有

$$\frac{V(\varepsilon)w_t - w_t}{\varepsilon} = \frac{V(\varepsilon + t)u - V(t)u}{\varepsilon} = \frac{V(t)V(\varepsilon)u - V(t)u}{\varepsilon} =$$

$$V(t)\,\frac{V(\varepsilon)u - u}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} V(t)Au$$

故 $V(t)u = w_t \in D(A)$，且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\varepsilon + t)u - V(t)u}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\varepsilon)V(t)u - V(t)u}{\varepsilon} = AV(t)u$$

证毕.

**引理 1.3** $D(A)$ 在 $B$ 中稠密.

**证明** 设 $u \in B$，令 $u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon V(t)u\mathrm{d}t$. 先证 $u_\varepsilon \to u$，再证 $u_\varepsilon \in D(A)$. 由中值定理，有

$$u_\varepsilon = V(\varepsilon')u \xrightarrow{\varepsilon \to 0} V(0)u = u, \quad 0 < \varepsilon' < \varepsilon$$

又

$$\frac{V(\delta)u_\varepsilon - u_\varepsilon}{\delta} = \frac{1}{\delta}\,\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon [V(\delta + t)u - V(t)u]\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{\delta}\,\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\delta^{\delta+\varepsilon} V(\tau)u\mathrm{d}\tau - \int_0^\varepsilon V(t)u\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{\delta}\,\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^{\varepsilon+\delta} V(\tau)u\mathrm{d}\tau - \int_0^\delta V(\tau)u\mathrm{d}\tau - \int_0^\varepsilon V(t)u\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{\delta}\,\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} V(\tau)u\mathrm{d}\tau - \int_0^\delta V(t)u\mathrm{d}t\right] \xrightarrow{\delta \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[V(\varepsilon)u - u]$$

故 $u_\varepsilon \in D(A)$. 证毕.

称 $\lambda \in \mathbf{C}$ 属于 $A$ 的预解集，若 $\lambda I - A$ 为 $D(A) \to B$ 的双射，且 $(\lambda I - A)^{-1}$ 有界.

**引理 1.4** 设 $|V(t)| \leqslant Me^{K|t|}$，则当 $\mathrm{Re}\lambda > K$ 时，$\lambda$ 属于 $A$ 的预解集，且

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t) u \mathrm{d}t, \quad u \in B$$

**证明**　令 $R_\lambda u = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t) u \mathrm{d}t, \forall u \in B$,则

$$\| R_\lambda u \| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{Re}\lambda t} M e^{K|t|} \mathrm{d}t \cdot \| u \| \leqslant$$

$$M \int_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}\lambda - K)t} \mathrm{d}t \cdot \| u \| = M' \| u \|$$

故 $R_\lambda$ 为有界算子.

易证:$R_\lambda(\lambda I - A)u = u, \forall u \in D(A)$,因而从$(\lambda I - A)u = 0$ 即得 $u = 0$,由此说明 $\lambda I - A$ 是 $D(A) \to B$ 的内射.

又由 $A$ 是 $V(t)$ 的无穷小生成元的定义,即

$$AR_\lambda u = \lambda R_\lambda u - u, \quad \forall u \in B$$

得知$(\lambda I - A)R_\lambda u = u, \forall u \in B$,即 $\lambda I - A$ 是满射. 证毕.

预解集记为 $\rho(A)$,$\mathbf{C} \backslash \rho(A)$ 称为 $A$ 的谱集.

若 $D(A)$ 在 $B$ 中稠密,称 $A$ 为稠定算子. 若图像$\{(u, Au): u \in D(A)\}$ 是 $B \times B$ 中的闭集,称 $A$ 是闭算子.

**命题 1.2**　设 $A$ 是 $V(t)$ 的无穷小生成元,则 $A$ 是稠定的闭算子.

**证明**　$A$ 稠定由引理 1.3 即得. 由引理 1.4 知,当 $\lambda$ 充分大时,$(\lambda I - A)^{-1}$ 为有界算子.

由闭图像定理,$(\lambda I - A)^{-1}$ 是闭算子,故 $\lambda I - A$ 为闭算子,即 $A$ 为闭算子. 证毕.

**命题 1.3**　若 $V(t), W(t)$ 为 $B$ 上的单参数算子群,若 $A$ 同时为 $V(t)$ 及 $W(t)$ 的无穷小生成元,则 $W(t) = V(t)$.

**证明**　因为对 $\forall u \in B$,有

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t) u \mathrm{d}t = (\lambda I - A)^{-1} u = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} W(t) u \mathrm{d}t$$

任取 $v \in B^*$,即 $v$ 为 $B$ 上的连续线性泛函,有

$$\left(v,\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}V(t)u\mathrm{d}t\right)=\left(v,\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}W(t)u\mathrm{d}t\right)$$

即

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(v,V(t)u)\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(v,W(t)u)\mathrm{d}t$$

因为$(v,V(t)u)$与$(v,W(t)u)$均为$t$的连续函数,所以

$$(v,V(t)u)=(v,W(t)u)$$

即得

$$(v,V(t)u-W(t)u)=0$$

现在利用Hahn-Banach定理的一个推论:设$y\in B$(Banach空间),则$\exists\Lambda\in B^*$,$\Lambda\neq 0$,使$\Lambda(y)=\|\Lambda\|_{B^*}\cdot\|y\|$.

取$y=V(t)u-W(t)u$,$v\in B^*$,则

$$(\Lambda,y)=0,\quad \Lambda(y)=\|\Lambda\|_{B^*}\cdot\|y\|$$

所以

$$\|y\|=0$$

也即$(V(t)-W(t))u=0$,$\forall u\in B$,故$V(t)=W(t)$. 证毕.

积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}V(t)u\mathrm{d}t$相当于对$V(t)u$作Laplace变换.

**例 1.5** 设$A$是$B$上的有界算子,定义$V(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}A^n$,则

(1) $V(t)$是$B$上的强连续算子群;

(2) $V(t)$的无穷小生成元恰为$A$.

**证明** (1) 为证$V(t)$是$B$上的强连续算子群,须证:

(i) 因为$\|V(t)\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{|t|^n}{n!}\|A\|^n=\mathrm{e}^{|t|\cdot\|A\|}$,所以$\forall t\in\mathbf{R}$,$V(t)\in\mathcal{L}(B)$.

(ii) 任取$t,s\in\mathbf{R}$,有

$$V(t)V(s)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{l=0}^{N}\frac{t^l}{l!}A^l\cdot\sum_{n=0}^{N}\frac{s^n}{n!}A^n\right)=$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\sum_{l+n=m}\frac{(n+l)!s^nt^l}{n!l!}A^{n+l}\cdot\frac{1}{(n+l)!}=$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{(t+s)^m}{m!}A^m=V(t+s)$$

(ⅲ) $V(0)=I$ 显然.

(ⅳ) 对任意 $u\in B$,有

$$\|V(t)u-V(t_0)u\| = \|(V(t)-V(t_0))u\| =$$

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n-t_0^n}{n!}A^nu\right\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t^n-t_0^n|}{n!}\|A\|^n\|u\|\leqslant$$

$$|t-t_0|\sum_{n=1}^{\infty}|t'|^{n-1}\frac{\|A\|^n}{(n-1)!}\|u\|$$

因为 $t'$ 介于 $t$ 和 $t_0$ 之间,所以

$$\|V(t)u-V(t_0)u\|\leqslant|t-t_0|\cdot\|A\|e^{t'\|A\|}\cdot\|u\|\xrightarrow{t\to t_0}0$$

这证明了强连续性.

(2) 再来证明 $A$ 是无穷小生成元:

$$\lim_{t\to0}\frac{V(t)u-u}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)u\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^nA^nu\Big|_{t=0}=Au$$

证毕.

注意,当 $A$ 是无界算子时,不能有展开式 $\sum\frac{t^n}{n!}A^n$.

**引理1.5**　设 $L$ 是Banach空间的对偶 $B^*$ 中的weak* 拓扑下稠密的线性子空间,若 $u,v\in B$,且

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{V(t)u-u}{t},w\right)=(v,w),\quad\forall w\in L\subset B^*$$

则 $u\in D(A)$,且 $Au=v$.

说明:weak* 拓扑下稠密是指对 $\forall l\in B^*$,$\exists l_j\in L$,使 $\langle l-l_j,u\rangle\xrightarrow{j\to\infty}0$,$\forall u\in B$.

**证明**　因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(t)u,w) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{V(t+s)-V(t)}{s}u,w\right)=$$

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{V(t)[V(s)u-u]}{s},w\right)=$$

$$V(t)\left(\lim_{s\to 0}\frac{V(s)u-u}{s},w\right)=(V(t)v,w)$$

所以

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{V(t)u-u}{t},w\right)=(V(0)v,w)=(v,w)$$

对每个 $w\in B^*$ 成立. 因此 $u\in D(A)$,且

$$Au=\lim_{t\to 0}\frac{V(t)u-u}{t}=V(0)v=v,\quad \forall u\in B$$

证毕.

**例 1.6** 令 $B=L^p(\mathbf{R}),p\geqslant 1$,

$$V(t)=\tau_p(t),\quad \tau_p(t)f(x)=f(x+t)$$

即 $\tau_p(t)$ 为平移算子,求 $D(A)$ 及 $A$.

**解** 由定义,$D(A)=\Bigg\{f\in L^p$,且存在 $f_1\in L^p$,使

$$\left\|\frac{\tau_p(t)f(x)-f(x)}{t}-f_1\right\|_{L^p}=\left\|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-f_1\right\|_{L^p}\to 0\Bigg\}$$

记 $D'(A)=\left\{f:f\in L^p,\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\in L^p\right\}$. 由 $f\in D(A)$,即得

$$\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-f_1,g\right)\to 0,$$

$$\forall g\in(L^p)^*=L^q,\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$$

特别地,可设 $g\in C_0^\infty(\mathbf{R})$(由于 $C_0^\infty(\mathbf{R})$ 在 $L^q(\mathbf{R})$ 中稠密),有

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t},g\right)=(f_1,g)$$

由于

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t},g\right)=\lim_{t\to 0}\left(f(x),\frac{g(x-t)-g(x)}{t}\right)$$

且$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(x-t)-g(x)}{t}=-g'(x)$，因此

$$(f_1,g)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t},g\right)=\left(f,-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},g\right)$$

故 $f_1=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\in L^p, f\in D'(A)$，即 $D(A)\subset D'(A)$.

反之，若 $f\in D'(A)$，则对 $\forall g\in C_0^\infty$，有

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t},g\right)=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},g\right)=(f_1,g)$$

由引理 1.5，有 $f_1=v, V(t)=\tau_p(t)$，得 $f\in D(A)$，所以 $D(A)=D'(A)$，且 $A=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. 证毕.

此例说明 $A$ 不是有界算子.

### 1.2.2　光滑向量、解析向量

**定义 1.5**　设 $V(t)$ 是 $\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{B}$ 是 Banach 空间) 上的强连续算子群，称 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{B}$ 是关于 $V(t)$ 的 $C^k$ 向量，当且仅当 $F(t)=V(t)\boldsymbol{u}$ 是 $\mathbf{R}\to\boldsymbol{B}$ 的 $C^k$ 映射，所有 $C^k$ 向量的全体记为 $\boldsymbol{C}_V^k$.

**命题 1.4**　$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}_V^k\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\in D(A^k)$，其中 $A$ 是 $V(t)$ 的无穷小生成元，且 $\dfrac{\mathrm{d}^kF(t)}{\mathrm{d}t^k}=V(t)A^k\boldsymbol{u}=A^kV(t)\boldsymbol{u}=A^kF(t)$.

**证明**　关于 $k$ 作归纳法. 当 $k=1$ 时，

$$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}_V^1\Leftrightarrow\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\text{ 存在 }\Leftrightarrow$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t+\Delta t)\boldsymbol{u}-V(t)\boldsymbol{u}}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t)(V(\Delta t)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})}{\Delta t}\text{ 存在 }\Leftrightarrow$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(\Delta t)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}}{\Delta t} \text{存在且等于} A_u \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \in D(A).$$

所以 $k = 1$ 成立.

现在设对 $k$ 成立,则

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1} F(t)}{\mathrm{d}t^{k+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F^{(k)}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(t)A^k \boldsymbol{u}) =$$

$$V(t)A(A^k \boldsymbol{u}) = V(t)A^{k+1}\boldsymbol{u}$$

故 $\boldsymbol{u} \in C_V^k \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \in D(A^k)$. 证毕.

**定义 1.6** 若 $F(t) = V(t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B})$ 是 $\mathbf{R} \to \boldsymbol{B}$ 的 $C^\infty$ 映射,则称 $\boldsymbol{u}$ 为 $C^\infty$ 向量.

从命题 1.4 得到:

**推论 1.1** $\boldsymbol{u} \in C_V^\infty \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$.

**定义 1.7** 称 $f: \mathbf{R} \to \boldsymbol{B}$ 在点 $t_0$ 解析(或实解析),当且仅当 $\exists \delta(t_0) > 0$,使 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0)$ 在 $|t - t_0| < \delta(t_0)$ 中一致收敛于 $f(t)$.

类似地,若 $f: \mathbf{C} \to \boldsymbol{B}$,则可定义复解析.

**命题 1.5** $f$ 在 $t_0$ 解析 $\Leftrightarrow \exists m > 0, \delta > 0$,当 $|t - t_0| < \delta$ 时,使 $\| f^{(n)}(t) \| \leqslant n! m^n$.

**定义 1.8** 称 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}$ 是关于 $V(t)$ 的解析向量,当且仅当 $F(t) = V(t)\boldsymbol{u}$ 是 $\mathbf{R} \to \boldsymbol{B}$ 的解析函数,即 $F(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 的每一点均解析.

**引理 1.6** $\boldsymbol{u}$ 是关于 $V(t)$ 的解析向量 $\Leftrightarrow F(t) = V(t)\boldsymbol{u}$ 在 $t = 0$ 解析.

**证明** 必要性是显然的,下面证明充分性. 设 $F(t)$ 在 $t = 0$ 解析,则当 $|t| < \delta$ 时,$F(t) = \sum \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(0)$. 任取 $\mathbf{R}$ 中点 $t_0$,当 $|t - t_0| < \delta$ 时,利用命题 1.4,有

$$F(t) = F(t - t_0 + t_0) = V(t - t_0 + t_0)\boldsymbol{u} = V(t_0)V(t - t_0)\boldsymbol{u}$$

记 $t - t_0 = s$

$$F(t) = V(t_0)F(s) = V(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}F^{(n)}(0) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}V(t_0)A^n\boldsymbol{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^nF(t_0)}{\mathrm{d}t^n}$$

证毕.

**命题 1.6** $\boldsymbol{u}$ 为解析向量,当且仅当 $\exists C > 0, \forall k = 1,2,\cdots,$ 使得 $\boldsymbol{u} \in D(A^k)$,且 $\| A^k \| \leqslant C^{k+1}k^{k+\frac{1}{2}}$.

**证明** 利用引理 1.6 和前述命题 1.5,$\boldsymbol{u}$ 为解析向量 $\Leftrightarrow$

$F(t) \equiv V(t)\boldsymbol{u}$ 在 $t = 0$ 解析 $\Leftrightarrow$

$\exists \delta, m > 0$,使 $\| F^{(k)}(t) \| \leqslant k!m^k, \ | t | < \delta \Leftrightarrow$

$\exists \delta, m > 0$,使 $\| V(t)A^k\boldsymbol{u} \| \leqslant k!m^k, \ | t | < \delta$

$(\| A^k u \| = \| V(-t)V(t)A^k\boldsymbol{u} \| \leqslant \| V(-t) \| \cdot \| V(t)A^k\boldsymbol{u} \|) \Leftrightarrow$

$\exists \delta, m > 0$,使 $\| A^k u \| \leqslant Ck!m^k$

由斯特林公式 $k! = \mathrm{e}^{-k}k^{k+\frac{1}{2}}(1+o(1))$ 得 $k! \leqslant C\mathrm{e}^{-k}k^{k+\frac{1}{2}}$,所以,$u$ 为解析向量 $\Leftrightarrow$

$\exists \delta, m > 0$,使

$\| A^k u \| \leqslant C\mathrm{e}^{-k}k^{k+\frac{1}{2}}m^k = C(m\mathrm{e}^{-1})^k k^{k+\frac{1}{2}} \leqslant C_0^{k+1}k^{k+\frac{1}{2}}$

证毕.

**命题 1.7** $C_V^{\infty}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 中稠密.

**证明** 设 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}$,令 $u_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon(s)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s$,其中 $\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$,$\rho \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$,$\rho \geqslant 0$,$\int \rho(t)\mathrm{d}t = 1$,要证 $u_\varepsilon \in C_V^{\infty}$,且 $u_\varepsilon \to \boldsymbol{u}$.

由于

$$V(t)u_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon(s)V(t+s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s = \int \rho_\varepsilon(s-t)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s$$

对上式求导,知 $V(t)u_\varepsilon$ 为 $\mathbf{R} \to \boldsymbol{B}$ 的 $C^{\infty}$ 光滑映射,即 $u_\varepsilon \in C_V^{\infty}$,且

$$u_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon(s)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s = \int_{|s|\leqslant\varepsilon} \rho_\varepsilon(s)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s \xlongequal{\text{(积分中值定理)}}$$

$$V(s')\boldsymbol{u}\int \rho_\varepsilon(s)\mathrm{d}s(|s|\leqslant\varepsilon) =$$

$$V(s')\boldsymbol{u}\int \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}s = V(s')\boldsymbol{u}\int \rho(s)\mathrm{d}s =$$

$$V(s')\boldsymbol{u} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} V(0)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

证毕.

**命题 1.8** $C_V^\infty$ 在 $D(A^k)$ 中稠密，其中 $D(A^k)$ 的范数由 $\| u \|_{D(A^k)} = [\| u \|^2 + \| A^k u \|^2]^{\frac{1}{2}}$ 给定.

**证明** 只须证 $A^k u_\varepsilon \to A^k u$, $\forall u \in D(A^k)$. 事实上

$$A^k u_\varepsilon = V(0)A^k u_\varepsilon = [V(t)A^k u_\varepsilon]_{t=0} = \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(V(t)u_\varepsilon)\right]_{t=0}$$

由命题 1.7 证明中 $V(t)u_\varepsilon$ 的表示，得

$$A^k u_\varepsilon = \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\int \rho_\varepsilon(s-t)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s\right]_{t=0} =$$

$$\int (-1)^k \rho_\varepsilon^{(k)}(s)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s =$$

$$\int \rho_\varepsilon(s)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}(V(s)\boldsymbol{u})\mathrm{d}s \xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}[V(s)\boldsymbol{u}]\big|_{s=0} = A^k(V(s)\boldsymbol{u})\big|_{s=0} = A^k\boldsymbol{u}$$

证毕.

**命题 1.9** 解析向量全体(关于 $V(t)$) 在 $\boldsymbol{B}$ 中稠密.

**证明** 令 $\rho_\varepsilon(t) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{4\varepsilon}}$，从而 $\int \rho_\varepsilon(s)\mathrm{d}s = 1$，

$$u_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon(s)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s$$

因此

$$V(t)u_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon(s)V(t+s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s = \int \rho_\varepsilon(s-t)V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\int e^{-\frac{(t-s)^2}{4\varepsilon}}V(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s$$

以下证明同前一样. 证毕.

前面均设 $\boldsymbol{B}$ 为 Banach 空间, 现在考虑 Hilbert 空间.

**定义 1.9**　设 $H$ 为 Hilbert 空间, 称 $H$ 上强连续单参数算子群 $U(t)$ 为酉的, 若 $U^*U = UU^* = I$.

**定理 1.1**　设 $A$ 是 $H$ 上稠定算子, 则 $A$ 是某个强连续单参数酉算子群 $U(t)$ 的无穷小生成元 $\Leftrightarrow A$ 是反自伴算子, 即 $A^* = -A$.

读者可以自己证明下面命题.

设 $A$ 是 Hilbert 空间上的有界算子, 且为反自伴算子. 令 $V(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$, 可以证明 $V(t)$ 是强连续单参数酉算子半群.

## 1.3　Heisenberg 群的概念

设 $G$ 满足

(1) $G$ 是解析流形(实解析流形或复解析流形);

(2) $G$ 是群;

(3) $f(a,b) = ab^{-1}$ 是 $G\times G\to G$ 的解析映射;

则称 $G$ 为一个 Lie 群.

所谓 Heisenberg 群, 是指在解析流形 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上定义如下群运算:

$$(t,q,p)\cdot(t',q',p') = \left(t+t'+\frac{1}{2}(pq'-p'q),q+q',p+p'\right)$$

其中 $(t,q,p)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, $(t',q',p')\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, 则单位元为 $(0,0,0)$, 逆元 $(t,q,p)^{-1} = (-t,-q,-p)$, 且 $(t,q,p)\cdot(t',q',p')^{-1} = \left(t-t'+\frac{1}{2}(-pq'+p'q),q-q',p-p'\right)$ 的每个分量都是多项式.

### 1.3.1 从算子群导出 Heisenberg 群

设 $p \in \mathbf{R}^n, q \in \mathbf{R}^n$，定义关于参数 $p$ 的平移群：

$$\tau_p : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$$

$$\tau_p u(x) = u(x+p), \quad \forall x \in L^2$$

再定义 $m_q u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}u(x)$，其中 $q \cdot x = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j$. 易证 $\| \tau_p u \| = \| u \|$（这里 $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^2}$），即 $\tau_p$ 为一个酉算子. 同理 $\| m_q u \| = \| u \|$，即 $m_q$ 为一个酉算子，且

$$\tau_p \tau_{p'} = \tau_{p+p'}, \quad m_q m_{q'} = m_{q+q'}$$

令 $V_p(t) = \tau_{tp}$. 固定 $p \in \mathbf{R}^n$，而 $t \in \mathbf{R}$，则

$$V_p(t)V_p(s) = \tau_{tp}\tau_{sp} = \tau_{(t+s)p} = V_p(t+s)$$

且 $V_p(t)$ 的无穷小生成元可如下计算：设 $u \in C_0^\infty$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_p(t)u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tau_{tp}u(x)\right]_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x+tp)\right|_{t=0} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \mathrm{i}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j D_j\Big)u = \mathrm{i}(p \cdot D)u$$

这里记 $D_j = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$. 所以 $\tau_{tp} = V_p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tp\cdot D}$，以 $t = 1$ 代入，得 $\tau_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot D}$.

同理，令 $W_p(t) = m_{tq}$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_q(t)u\right|_{t=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_{tq}u(x)\right]_{t=0} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tq\cdot x}u(x)\right]_{t=0} = \mathrm{i}q \cdot xu(x)$$

记 $X_j : X_j u = x_j u$，$X = (X_1, \cdots, X_n)$，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_q(t)u\,|_{t=0} = \mathrm{i}q \cdot Xu(x) = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} q_j X_j u(x)$，故 $m_{tq} = W_q(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tq\cdot X}$，所以 $m_q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot X}$. 又

$$m_q \tau_p u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}(\tau_p u)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}u(x+p)$$

$$\tau_p m_q u(x) = \tau_p e^{iq\cdot x} u(x) = e^{iq\cdot(x+p)} u(x+p) = e^{iq\cdot p} m_q \tau_p u(x)$$

$$m_q \tau_p = e^{iq\cdot X} e^{ip\cdot D}$$

因此 $$e^{ip\cdot D} e^{iq\cdot X} = \tau_p m_q = e^{iq\cdot p} m_q \tau_p = e^{iq\cdot p} e^{iq\cdot X} e^{ip\cdot D}$$

将若干个 $m_q, \tau_p$ 进行复合，得到形式

$$e^{it} e^{iq\cdot X} e^{ip\cdot D}$$

给定算子 $i(tI + p\cdot D + q\cdot X) = A$，求

$$V_{(t,q,p)}(s) : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$$

使 $A$ 是 $V_{(t,q,p)}(s)$ 的无穷小生成元.

令 $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$

$$V_{(t,q,p)}(s) u(x) = v(s,x)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}v(s,x)}{\mathrm{d}s} = Av(s,x) = i(tI + p\cdot D + q\cdot X)v(s,x) =$$

$$itv + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial x_j} v + i\sum_{j=1}^{n} q_j x_j v$$

由 $v|_{s=0} = u(x)$，利用特征线法可解出

$$v(s,x) = e^{i\left(st + sq\cdot X + \frac{1}{2}s^2(p\cdot q)\right)} u(x+sp) = V_{(t,q,p)}(s) u(x)$$

特别地，定义

$$\pi_{(t,q,p)} u(x) = V_{(t,q,p)}(1) u(x) = e^{i\left(t + q\cdot x + \frac{1}{2}p\cdot q\right)} u(x+p),\ \forall u \in L^2$$

从

$$\pi_{(t,q,p)} \circ \pi_{(t',q',p')} = \pi_{(t'',q'',p'')}$$

可算出

$$(t'',q'',p'') = (t,q,p)\cdot(t',q',p')$$

并且推得

$$e^{i(tI + q\cdot X + p\cdot D)} \cdot e^{i(t'I + q'\cdot X + p'\cdot D)} = e^{i(t''I + q''\cdot X + p''\cdot D)}$$

其中，$t'' = t + t' + \frac{1}{2}(pq' - p'q)$，$q'' = q + q'$，$p'' = p + p'$.

### 1.3.2 从多复变几何导出 Heisenberg 群

设 $z=(z_0,z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^{n+1}=(z_0,z')$,其中,$z_j\in\mathbf{C}$,$z'\in\mathbf{C}^n$. 令 $\rho(z)=\mathrm{Im}z_0-|z'|^2$, $\forall z=(z_0,z')\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$. 令 $D=\{z\in\mathbf{C}^{n+1}:\rho(z)>0\}$,$D$ 的边界 $\partial D=\{z\in\mathbf{C}^{n+1},\rho(z)=0\}$.

设 $(t,w)\in\mathbf{R}\times\mathbf{C}^n$. 考虑一个映射

$$T_{(t,w)}:D\to\mathbf{C}^{n+1}$$

使 $$T_{(t,w)}(z_0,z')=(z_0+t+\mathrm{i}|w|^2+2\mathrm{i}z'\overline{w},z'+w)$$

其中,$z'\overline{w}=\sum_{j=1}^{n}z_j'\overline{w}_j$. 显然,$T_{(t,w)}$ 是解析的,且可逆. 设 $T_{(t,w)}(z_0,z')=(y_0,y')$,可求出 $z_0,z'$. 可知 $TD\subset D$,且 $T:D\to D$ 为解析同胚,具有性质 $\rho(T_{(t,w)}(z_0,z'))=\rho(z_0,z')$.

事实上,

$$\begin{aligned}&\rho(T_{(t,w)}(z_0,z'))=\rho(y_0,y')=\\&\quad\mathrm{Im}z_0+|w|^2+2\mathrm{Im}(\mathrm{i}z'\overline{w})-|z'+w|^2=\\&\quad|w|^2+\mathrm{Im}z_0+z'\overline{w}+\overline{z'}w-(z'+w)(\overline{z'}+\overline{w})=\\&\quad\mathrm{Im}z_0-z'\overline{z'}=\mathrm{Im}z_0-|z'|^2=\rho(z_0,z')\end{aligned}$$

易证:$T_{(t,w)}\circ T_{(t',w')}=T_{(t'',w'')}$,其中 $t''=t+t'+2\mathrm{Im}(w\cdot\overline{w'})$,$w''=w+w'$. 令 $w=x+\mathrm{i}y$,$x,y\in\mathbf{R}^n$,则

$$t''=t+t'+2\mathrm{Im}((x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y))=t+t'+2(-y'x+x'y)$$

此外,从理论物理角度也可考虑 $p\cdot D$ 与 $q\cdot X$ 的交换关系,得到 Heisenberg 代数,再得到 Heisenberg 群.

用 Heisenbery 群的方法可研究多复变函数中非常困难的问题,如 $\overline{\partial}_b$ 问题.

# 第二章　Heisenberg 群的表示

本章 2.1 节介绍 Heisenberg 群 $H_n$ 上的不可约酉表示(见参考文献[15,24,50－52]);2.2 节介绍函数与分布的表示;2.3 节介绍 Plancherel 公式.

## 2.1　Heisenberg 群的表示

首先给出 Lie 群上的表示概念(见参考文献[51,53]).

**定义 2.1**　设 $G$ 是 Lie 群,$B$ 为 Banach 空间. 设映射 $\pi(w): G\to\mathcal{L}(B)$($w\in G$, $\mathcal{L}(B)$ 为 $B$ 上的有界线性算子全体),满足:

(1) $\pi(w\cdot w')=\pi(w)\pi(w')$, $\forall\, w,w'\in G$(同态性);

(2) $\forall\, f\in B$,$\pi(w)f$ 是 $G\to B$ 的连续映射(强连续性);

(3) $\pi(e)=I$,$e$ 为 $G$ 中单位元;

则称 $\pi$ 是 $G$ 在 $B$ 上的一个表示,$B$ 称为 $\pi$ 的表示空间. 特别地,若 $B$ 为一个 Hilbert 空间,且 $\pi(w)$ 是一个酉算子,则称 $\pi$ 是一个酉表示.

对 Heisenberg 群,有

**命题 2.1**　设 $w=(t,q,p)\in H_n$. 令 $\pi(w)=\pi(t,q,p): L^2(\mathbf{R}^n)\to L^2(\mathbf{R}^n)$ 如下:

$$\pi(t,q,p)f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t+q\cdot x+\frac{1}{2}p\cdot q\right)}f(x+p),\quad \forall\, f\in L^2(\mathbf{R}^n)$$

则 $\pi$ 是 $H_n$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的一个酉表示.

**证明**　因为

$$\|\pi(t,q,p)f(x)\|_{L^2}=\left[\int_{\mathbf{R}^n}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(t+q\cdot x+\frac{1}{2}p\cdot q\right)}f(x+p)\right|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+p)|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}(\text{令 } x'=x+p)=$$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^n} |f(x')|^2 \mathrm{d}x'\right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2}$$

所以 $\pi(t,q,p)$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉算子. 证毕.

验证定义 2.1 中的性质:

(1) $\pi(t,q,p)\pi(t',q',p') = \pi((t,q,p)\cdot(t',q',p'))$,显然.

(2) 当 $g \in H_n, g \to g_0 \in H_n$ 时,

$\pi(g)f(x) \to \pi(g_0)f(x)$, 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中, $\forall f \in L^2$

事实上,对 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,有

$$\begin{aligned}\pi(g)f - \pi(g_0)f = \pi(g_0 g_0^{-1} g)f - \pi(g_0)f = \\ \pi(g_0)\pi(g_0^{-1}g)f - \pi(g_0)f = \\ \pi(g_0)[\pi(g_0^{-1}g)f(x) - f(x)]\end{aligned}$$

令 $g_0^{-1}g = h$,则 $g \to g_0 \Leftrightarrow h \to e$,所以

$$\pi(g)f - \pi(g_0)f = \pi(g_0)[\pi(h)f(x) - f(x)]$$

下面证明 $\|\pi(h)f(x) - f(x)\|_{L^2} \to 0$,(当 $h \to e = (0,0,0)$).

设 $h = (t',q',p')$,对 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,有

$$\|\pi(h)f(x) - f(x)\|_{L^2} =$$

$$\left[\int_{\mathrm{supp}f} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t'+q'\cdot x+\frac{1}{2}p'\cdot q')} f(x+p') - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \to$$

$$0(t' \to 0, q' \to 0, p' \to 0)(一致地)$$

当 $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ 时,因为 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^2$ 中稠密,所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists f_0 \in C_0^\infty$,使 $\|f - f_0\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$. 又由已证,当 $|g - g_0| < \delta$ 时,有

$$\|\pi(g)f_0 - \pi(g_0)f_0\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\|\pi(g)f - \pi(g_0)f\|_{L^2} \leqslant \\ \|\pi(g)(f - f_0)\|_{L^2} + \|\pi(g_0)(f - f_0)\|_{L^2} + \\ \|\pi(g)f_0 - \pi(g_0)f_0\|_{L^2} \xlongequal{(\pi 为酉算子)}\end{aligned}$$

$$2\|f-f_0\|_{L^2}+\|\pi(g)f_0-\pi(g_0)f_0\|_{L^2}<\varepsilon$$

得证.

(3) $\pi(e)=I$. 这从下式直接可得:

$$\pi(e)f(x)=\pi(0,0,0)f(x)=f(x)$$

命题得证. 证毕.

**注 2.1**　当Banach空间或Hilbert空间为无限维时,其表示称为无限维表示.

**定义 2.2**　称 $\delta_\lambda: H_n \to H_n(\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\})$:

$$\delta_\lambda(t,q,p)=(\lambda t,\mathrm{sgn}\lambda\cdot|\lambda|^{\frac{1}{2}}q,|\lambda|^{\frac{1}{2}}p)$$

为伸缩变换(dilation). 它是一类不均匀的相似变换.

**命题 2.2**　(1) $\delta_\lambda\circ\delta_{\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}$, $\forall\lambda,\lambda'\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$(即 $\delta_\lambda$ 关于 $\lambda$ 同态);

(2) $\delta_\lambda(w\cdot w')=\delta_\lambda(w)\delta_\lambda(w')$, $\forall w,w'\in H_n$(即 $\delta_\lambda$ 关于元素 $w\in H_n$ 同态).

证明是容易的.

**定义 2.3**　$\forall\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$,定义 $\pi_\lambda(w)=\pi(\delta_\lambda(w))$,这里 $\pi$ 如命题 2.1.

**命题 2.3**　$\pi_\lambda(\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\})$ 是 $H_n$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉表示.

**证明**　对 $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\pi_\lambda(w)f=\pi(\delta_\lambda(w))f$. 因为 $\delta_\lambda(w)\in H_n$, $\pi$ 为酉算子,所以 $\pi_\lambda(w)$ 是酉算子.

(1) 对任意 $w,w'\in H_n$,有

$$\pi_\lambda(w)\pi_\lambda(w')=\pi(\delta_\lambda(w))\pi(\delta_\lambda(w'))=\pi(\delta_\lambda(w)\cdot\delta_\lambda(w'))=\pi(\delta_\lambda(w\cdot w'))=\pi_\lambda(w\cdot w')$$

(2) 当 $w\to w_0$ 时, $\delta_\lambda(w)\to\delta_\lambda(w_0)$,因此在 $L^2$ 中,有

$$\pi_\lambda(w)f=\pi(\delta_\lambda(w))f\to\pi(\delta_\lambda(w_0))f=\pi_\lambda(w_0)f,\quad\forall f\in L^2$$

(3) $\pi_\lambda(e)=\pi(\delta_\lambda(e))=\pi(e)=I$. 证毕.

**注 2.2**　从定义 2.3 知 $\pi_1=\pi$.

**注 2.3**　称 $\pi_\lambda$ 为 $H_n$ 的无穷维非平凡表示.

**定义 2.4**　$H_n$ 的一维(非平凡)表示定义如下:取 $B=\mathbf{C}$,定义

内积$(z,z') = z \cdot \overline{z'}$，则 $\mathbf{C}$ 构成一个 Hilbert 空间. 取 $\pi_{(y,\eta)}(t,q,p)z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y\cdot q+\eta\cdot p)}z$，这是个酉算子，且满足定义 2.1 中的(1) ~ (3).

这里只证明(1)：

$$\pi_{(y,\eta)}(t,q,p)\pi_{(y,\eta)}(t',q',p')z = \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(yq+\eta p)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(yq'+\eta p')}z = \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y(q+q')+\eta(p+p'))}z = \\ \pi_{(y,\eta)}[(t,q,p)\cdot(t',q',p')]z$$

其余易证.

所谓 $H_n$ 的平凡表示，是指 $\pi(t,q,p) = I$(恒等算子)，$\forall (t,q,p) \in H_n$.

**定义 2.5** 设 $\pi$ 是 $H_n$ 的一个酉表示，全体表示所成的空间为 $H_\pi$，称 $\pi$ 是不可约的，若不存在 $H_\pi$ 的一个真、闭的子空间 $H'_\pi$，使

$$\pi(g)H'_\pi \subset H'_\pi, \quad \forall g \in H_n$$

此式说明 $H'_\pi$ 为不变子空间，上述包含关系恰是不变子空间的含义.

如何判断 $\pi$ 不可约？我们有下列判别准则.

**定理 2.1** 设 $\pi$ 是 $H_n$ 的一个酉表示，则 $\pi$ 是不可约的，当且仅当 $A \in \mathcal{L}(H_\pi)$，$A\pi(g) = \pi(g)A$，$\forall g \in H_n \Rightarrow A = \lambda I$，$\lambda \in \mathbf{C}$.

该定理对一般的 Lie 群也成立. 利用此定理，可证明：

**命题 2.4** $\pi$ 是不可约的.

**证明** 任取 $A: L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ 为有界算子. 若 $\pi(t,q,p)A = A\pi(t,q,p)$，特别取 $(t,q,p) = (0,q,0)$，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}Af(x) = A[\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}f(x)]$，$f \in L^2$，对其等号两边同乘以 $g(q) \in C_0^\infty$，并对 $q$ 积分：

$$\int g(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\mathrm{d}qAf(x) = \int A[g(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}f(x)]\mathrm{d}q = \\ A\left[\int g(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\mathrm{d}qf(x)\right]$$

因此

$$\tilde{g}(x)Af(x) = A(\tilde{g}(x)f(x))$$

其中 $\tilde{g}(x) = \int g(q)e^{iq\cdot x}dq$. 令 $\tilde{g}(x) = G(x) \in \mathscr{S}$($\mathscr{S}$为 Schwartz 空间),因此

$$G(x)Af(x) = A(G(x)f(x)), \quad G \in \mathscr{S}, \forall f \in L^2$$

令 $B_j = \{x : |x| \leqslant j, x \in \mathbf{R}^n\}$,取

$$f_j = \begin{cases} 1, & x \in B_j \\ 0, & x \notin B_j \end{cases}$$

则 $f_j \in L^2$,且

$$A(f_j(x)G(x)) = A(f_j)G(x), \quad G \in \mathscr{S}$$

令 $j \to \infty$,得

$$A(G) = \lim_{j\to\infty} A(f_j) \cdot G(x) = a(x)G(x) \text{a. e. 在 } L^2 \text{ 意义下.}$$

在 $\pi(t,q,p)A = A\pi(t,q,p)$ 中,取 $(t,q,p) = (0,0,p)$,则

$$\pi(0,0,p)AG = A\pi(0,0,p)G$$

即

$$(AG)(x+p) = A(G(x+p))$$

$$a(x+p)G(x+p) = a(x)G(x+p), \quad \forall p \in \mathbf{R}^n$$

则 $a(x+p) = a(x)$a. e. ,故 $a(x) =$ 常数 a. e. . 从而 $AG = \lambda G$a. e. ,即 $A = \lambda I$. 由 $\mathscr{S}$在 $L^2$ 中稠密,得证.

现在举一个可约酉表示的例子.

**例 2.1**　取 $w \in \mathbf{R}^{2n+1}, w' \in \mathbf{R}^{2n+1}, f \in L^2(\mathbf{R}^{2n+1})$,定义表示 $\pi'(t,q,p)f(w') = f(w \cdot w')$. 可以证明这不是一个不可约酉算子:$L^2(\mathbf{R}^{2n+1}) \to L^2(\mathbf{R}^{2n+1})$,且是一个酉表示.

**证明**　对 $f \in L^2(\mathbf{R}^{2n+1})$,

$$\pi'(w)\pi'(w')f(w'') = f(w \cdot w' \cdot w'') = \pi'(w \cdot w')f(w'')$$

反证法:假设 $\pi'$ 为不可约的,则设 $A \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^{2n+1}))$,且

$$A\pi'(w)f(w') = \pi'(w)Af(w')$$

则 $A = \lambda I$. 现在取 $A = \pi'(1,0,0)$,则

$$A\pi'(t,q,p) = \pi'(1,0,0)\pi'(t,q,p) = \pi'(t+1,q,p)$$
$$\pi'(t,q,p)A = \pi'(t,q,p)\pi'(1,0,0) = \pi'(t+1,q,p)$$

因此

$$A\pi'(w) = \pi'(w)A$$

由不可约的假定，应有 $A = \lambda I(\lambda \in \mathbf{C})$，即 $\pi'(1,0,0)f(w) = \lambda f(w)$，即

$$f(t+1,q,p) = \lambda f(t,q,p), \quad \forall f \in L^2$$

但取 $f = \mathrm{e}^{-(t^2+|p|^2+|q|^2)} \in L^2(\mathbf{R}^{2n+1})$，代入上式，有

$$\mathrm{e}^{-(t^2+2t+1+|p|^2+|q|^2)} = \lambda \mathrm{e}^{-(t^2+|p|^2+|q|^2)}$$

即 $\mathrm{e}^{-(2t+1)} = \lambda$，其中 $t$ 是变量，$\lambda$ 是常量，矛盾. 证毕.

**注 2.4** 可证 $\pi_\lambda$（定义 2.3），$\pi_{(y,\eta)}$（定义 2.4）不可约.

**定义 2.6** 称 Lie 群 $G$ 上的两个酉表示 $\pi,\pi'$ 是等价的，若存在酉同构 $T: H_\pi \to H_{\pi'}$，使得 $\pi(g) = T\pi'(g)T^{-1}, \forall g \in G$.

下面将不加证明地叙述两个结论.

**定理 2.2** $\{\pi_\lambda, \pi_{(y,\eta)}\}$ 中任二不同元素，不是酉等价.

**定理 2.3** $H_n$ 的任一个不可约酉表示必和 $\{\pi_\lambda, \pi_{(y,\eta)}\}$ 中的某一个酉等价.

**注 2.5** 设 $\pi_\lambda^{\#}(t,q,p)f(x) = \mathrm{e}^{i\lambda(t+qx+\frac{1}{2}p\cdot q)}f(x+p)$. 这是个酉表示，可以证明 $\pi_\lambda^{\#}$ 酉等价于 $\pi_\lambda$.

## 2.2 卷积代数、函数及分布的表示

在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，显见：设 $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$，则有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+x_0)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$$

成立. 这里通过令 $x' = x + x_0$，则 $\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x$.

对 Lie 群 $G$，取定 $g_0 \in G$，对任意 $g \in G$，称变换

$$g_0 g : G \to G$$

为左平移，称变换

$$gg_0 : G \to G$$

为右平移. 对积分

$$\int_G f(g_0 g)\mathrm{d}g (f \in L^1(G))$$

若 $G$ 上的测度满足 $\mathrm{d}(g_0 g) = \mathrm{d}g$，则此测度称为左不变测度；若 $\mathrm{d}(gg_0) = \mathrm{d}g$，则此测度称为右不变测度.

任何 Lie 群 $G$ 都有不变测度(左或右)，但左不变测度和右不变测度一般不相等. 若左不变测度和右不变测度相等，则此 Lie 群称为幺模(Unimodular)Lie 群，幂零 Lie 群是幺模 Lie 群.

**命题 2.5**　Heisenberg 群上的不变测度是 $\mathrm{d}t\mathrm{d}q\mathrm{d}p$.

**证明**　从$(t', q', p') = (t_0, q_0, p_0) \circ (t, q, p)$，可知 $t' = t_0 + t + \frac{1}{2}pq_0 - \frac{1}{2}qp_0$，$q' = q + q_0$，$p' = p + p_0$. 得到 $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t + \frac{1}{2}q_0\mathrm{d}p - \frac{1}{2}p_0\mathrm{d}q$，$\mathrm{d}q' = \mathrm{d}q$，$\mathrm{d}p' = \mathrm{d}p$，因此

$$\mathrm{d}t' \wedge \mathrm{d}q' \wedge \mathrm{d}p' = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$$

证毕.

本书涉及的测度都是 Haar 测度，即不变测度.

### 2.2.1　Lie 群上的卷积

设 $f_1, f_2 \in L^1(G)$，定义卷积为

$$f_1 * f_2 = \int_G f_1(g_1) f_2(g_1^{-1} g)\mathrm{d}g_1$$

**命题 2.6**　$f_1 * f_2$ 是 $L^1(G) \times L^1(G) \to L^1(G)$ 的双线性连续映射.

**证明**　利用平移不变性，有

$$\int_G |f_1 * f_2|\mathrm{d}g = \int_G \left| \int_G f_1(g_1) f_2(g_1^{-1} g)\mathrm{d}g_1 \right| \mathrm{d}g \leqslant$$

$$\int_G\int_G |f_1(g_1)f_2(g_1^{-1}g)|\,\mathrm{d}g_1\mathrm{d}g \leqslant$$

$$\int_G |f_1(g_1)|\,\mathrm{d}g_1\int_G |f_2(g_1^{-1}g)|\,\mathrm{d}g =$$

$$\|f_1\|_{L^1}\cdot\|f_2\|_{L^1}$$

把卷积看做一个乘法,则卷积构成一个代数,且是运算封闭的. 对卷积还可证明

$$C_0^\infty(G)\times G_0^\infty(G)\to G_0^\infty(G)$$

$$\mathscr{E}'(G)\times\mathscr{E}'(G)\to\mathscr{E}'(G)$$

证明与欧氏空间中的证明平行. 证毕.

**定义 2.7** 设$\pi$是$G$的一个酉表示,表示空间$H_\pi$为Hilbert空间. 设$f\in L^1(G)$,定义$\pi(f): H_\pi\to H_\pi$为

$$\pi(f)u=\int_G f(g)\pi(g)u\mathrm{d}g,\quad \forall u\in H_\pi$$

$\pi(f)$ 称为 $f$ 的群 Fourier 变换.

**命题 2.7** $\pi(f)\in\mathscr{L}(H_\pi)$,且 $\|\pi(f)\|\leqslant\|f\|_{L^1}$.

**证明** 注意到$\pi(g)u: G\to H_\pi$,有

$$\|\pi(f)u\|_{H_\pi}\leqslant\int_G|f(g)|\cdot\|u\|_{H_\pi}\mathrm{d}g=\|f\|_{L^1(G)}\cdot\|u\|_{H_\pi}$$

证毕.

我们指出 $\pi(f)$ 与欧氏空间中 Fourier 变换有密切关系. 事实上,$G=\mathbf{R}^n$ 为交换群,$H_\pi=\mathbf{C}$. 取参变量 $\xi\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$, 对 $x\in\mathbf{R}^n$,$\alpha\in\mathbf{C}$, 有

$$\pi_\xi(x)\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\alpha$$

对 $f\in L^1$,有

$$\pi_\xi(f)\alpha=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\pi_\xi(x)\alpha\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}e^{i\xi\cdot x}f(x)\mathrm{d}x\cdot\alpha=\hat{f}(\xi)\cdot\alpha$$

因此 $$\pi_\xi(f)=\hat{f}(\xi)$$

欧氏空间上的 Fourier 变换有性质$(f_1*f_2)^\wedge=\hat{f}_1\hat{f}_2$. 对群

Fourier 变换,也有类似的性质.

**命题 2.8** 设 $f_1 \in L^1(G)$,$f_2 \in L^1(G)$,则

$$\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1)\pi(f_2)$$

上式等号右边表示合成.

先证明一个辅助等式:

$$\pi(g_1)\pi(f)u = \int f(g_1^{-1}g)\pi(g)u\mathrm{d}g, \quad g_1 \in G, \quad u \in H_\pi$$

**证明** 利用左不变测度,有

$$\text{左边} = \pi(g_1)\int_G f(g)\pi(g)u\mathrm{d}g = \int_G f(g)\pi(g_1 g)u\mathrm{d}g =$$

$$\int_G f(g_1^{-1}g_1 g)\pi(g_1 g)u\mathrm{d}g = \int_G f(g_1^{-1}g)\pi(g)u\mathrm{d}g = \text{右边}$$

命题 2.8 的证明:利用辅助等式,有

$$\pi(f_1)\pi(f_2)u = \int_G f_1(g_1)\pi(g_1)[\pi(f_2)u]\mathrm{d}g_1 =$$

$$\int_G f_1(g_1)\int_G f_2(g_1^{-1}g)\pi(g)u\mathrm{d}g\mathrm{d}g_1 =$$

$$\int_G\int_G f_1(g_1)f_2(g_1^{-1}g)\mathrm{d}g_1 \cdot \pi(g)u\mathrm{d}g =$$

$$\int_G (f_1 * f_2)(g)\pi(g)u\mathrm{d}g =$$

$$\pi(f_1 * f_2)u, \quad \forall u \in H_\pi$$

证毕.

**定义 2.8** 称 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_\pi$ 为关于 $\pi$ 的 $C^\infty$ 向量,若 $\pi(g)\boldsymbol{u}: G \to \boldsymbol{H}_\pi$ 为 $C^\infty$ 映射,这里 $g \in G$.

**命题 2.9** 设 $f \in C_0^\infty(G)$,$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_\pi$,$\pi(g)\boldsymbol{u}$ 为 $C^\infty$ 映射,则 $\pi(f)\boldsymbol{u}$ 为 $C^\infty$ 向量.

**证明** 令 $v = \pi(f)\boldsymbol{u}$,则由辅助等式,

$$\pi(g)v = \pi(g)\pi(f)\boldsymbol{u} = \int f(g^{-1}g')\pi(g')\boldsymbol{u}\mathrm{d}g'$$

因为 $g^{-1}g'$ 为 $g'$ 的解析函数，$f\in C_0^\infty$，故 $\pi(g)v\in C^\infty$，从而 $v$ 是 $C^\infty$ 函数. 证毕.

**定义 2.9** Gårding 空间 $\mathcal{G}_\pi=\{v: v=\pi(f)u, f\in C_0^\infty(G), u\in \boldsymbol{H}_\pi\}$.

由命题 2.9，知

$$\mathcal{G}_\pi\subset C^\infty(\pi)(C^\infty \text{ 向量的全体})$$

还可证明 $\mathcal{G}_\pi$ 在 $C^\infty(\pi)$ 中稠密.

**命题 2.10** 在 Heisenberg 群 $H_n$ 的情形，$C^\infty(\pi_1)=\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. 这里 $\pi=\pi_1$，见命题 2.1 和命题 2.3.

**证明** 注意 $\boldsymbol{H}_\pi=L^2(\mathbf{R}^n)$，且 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\subset C^\infty(\pi_1)$ 显然. 反之，设 $f\in C^\infty(\pi_1)\subset L^2(\mathbf{R}^n)$，则 $\pi(0,0,p)f(x)$ 为 $\mathbf{R}^n\to L^2(\mathbf{R}^n)$ 的 $C^\infty$ 映射，且

$$\pi(0,0,p)f(x)=f(x+p)$$

所以对任意的 $p$，有

$$D_p^\alpha f(x+p)\in L^2(\mathbf{R}^n)$$

即得

$$D_x^\alpha f(x)\in L^2(\mathbf{R}^n)$$

从而对任意的 $m$，有 $f\in H^m(\mathbf{R}^n)$. 由 Sobolev 嵌入定理，知 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，且由 $\pi(0,q,p)f(x): \mathbf{R}^n\to L^2(\mathbf{R}^n)$ 为 $C^\infty$ 映射，而 $\pi(0,q,p)f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\left(x+\frac{1}{2}p\right)}f(x+p)$，因此

$$D_p^\alpha D_q^\beta\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\left(x+\frac{1}{2}p\right)}f(x+p)\right]\in L^2$$

即

$$D_p^\alpha\left[\left(x+\frac{1}{2}p\right)^\beta f(x+p)\right]\in L^2$$

且

$$+\infty>\int_{\mathbf{R}^n}\left|D_p^\alpha\left[\left(x+\frac{1}{2}p\right)^\beta f(x+p)\right]\right|^2\mathrm{d}x\left(x'=x+\frac{p}{2}\right)=$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left|D_p^\alpha\left[x'^\beta f\left(x'+\frac{p}{2}\right)\right]\right|^2\mathrm{d}x'=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}\left|x'^\beta D_{x'}^\alpha f\left(x'+\frac{p}{2}\right)\right|^2\mathrm{d}x'$$

所以对任意的 $\alpha,\beta$,有 $x'^{\beta}D_{x'}^{\alpha}f(x')\in L^2$,因而 $f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. 证毕.

### 2.2.2 弱 $C^\infty$ 向量空间 $C_\omega^\infty(\pi)$

称 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}_\omega^\infty(\pi)$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}_\pi$,且 $\forall\omega\in\boldsymbol{H}_\pi$,有

$$\phi_{u,\omega}(g)=(\pi(g)\boldsymbol{u},\omega)_{\boldsymbol{H}_\pi}\in C^\infty(G)$$

这里注意 $\phi_{u,\omega}(g)$ 是通常函数.

**命题 2.11** $\boldsymbol{C}_\omega^\infty(\pi)=C^\infty(\pi)$

**证明** 化成欧氏空间情形,即须证:若 $f:U\subset\mathbf{R}^n\to\boldsymbol{H}_\pi$ 是连续映射,则

$$f\in C^\infty(U\to\boldsymbol{H}_\pi)\Leftrightarrow$$

$$F_\omega(x)=\langle f(x),\omega\rangle_{\boldsymbol{H}_\pi}\in C^\infty(U\to\boldsymbol{H}_\pi),\quad\forall\omega\in\boldsymbol{H}_\pi$$

"$\Rightarrow$" 显然,只证"$\Leftarrow$". 由于 $F_\omega(x+\Delta x)-F_\omega(x)-\sum_{j=1}^{n}\partial_jF_\omega\cdot\Delta x_j=o(|\Delta x|)$,可知

$$\langle f(x+\Delta x)-f(x)-\sum_{j=1}^{n}\partial_jf\cdot\Delta x_j,\omega\rangle=o(|\Delta x|)$$

且当 $|\Delta x|<\delta(x)$ 时,得到关于 $\omega$ 的逐点估计

$$\left|\langle\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\omega\rangle\right|\leqslant\boldsymbol{C}_\omega(x)$$

由一致有界原理,

$$\left\|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right\|_{\boldsymbol{H}_\pi}\leqslant\boldsymbol{C}'(x)$$

且

$$|\partial_jF_\omega(x)|=\left|\lim_{\Delta x\to0}\langle\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\omega\rangle\right|\leqslant\boldsymbol{C}'(x)\|\omega\|$$

因此 $\exists\phi_j\in\boldsymbol{H}_\pi$,使 $\partial_jF_\omega(x)=\langle\phi_j,\omega\rangle$. 又 $f(x)$ 是 $C(U\to\boldsymbol{H}_\pi)$,所以

$$\left\|\langle\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}-\phi_j,\omega\rangle\right\|=$$

$$\left\|\frac{F_\omega(x+te_j)-F_\omega(x)-\partial_jF_\omega(x)t}{t}\right\|=o(t)$$

令 $t\to 0$,得 $\phi_j=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$. 由此知 $f\in \boldsymbol{C}^r(U\to \boldsymbol{H}_\pi)$. 然后利用流形上集到欧氏空间子集的黏贴. 证毕.

当 $k\in \mathscr{E}'(G)$,如何定义 $\pi(k)$?

由 $f\in C_0^\infty$,可知

$$(\pi(f)u,\omega)_{H_\pi}=\left(\int f(g)\pi(g)u\mathrm{d}g,\omega\right)_{H_\pi}=$$

$$\int f(g)(\pi(g)u,\omega)_{H_\pi}\mathrm{d}g=\langle f(g),(\pi(g)u,\omega)_{H_\pi}\rangle=$$

$$\langle f(g),\phi_{u,\omega}\rangle$$

于是给出如下定义.

**定义 2.10** 设 $k\in \mathscr{E}'(G)$,则 $\pi(k)$ 定义为 $C^\infty(\pi)\to \boldsymbol{H}_\pi$ 的如下形式:

$$(\pi(k)u,\omega)_{H_\pi}=\langle k,(\pi(g)u,\omega)_{H_\pi}\rangle_G,$$
$$\forall u\in C^\infty(\pi),\forall \omega\in \boldsymbol{H}_\pi$$

**注 2.6** 定义 2.10 的合理性:

(1) 由 $u\in C^\infty(\pi)$ 可推出 $\phi_{u,\omega}(g)=(\pi(g)u,\omega)_{H_\pi}\in C^\infty(G)$;

(2) 利用紧支广义函数的结构定理,有 $|(\pi(k)u,\omega)_{H_\pi}|\leqslant C\sup_{k,|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha\phi_{u,\omega}|\leqslant C\sup|\langle\partial_g^\alpha\pi(g)u,\omega\rangle|\leqslant C_\alpha\|\omega\|$,因此 $\pi(k)u\in \boldsymbol{H}_\pi^*=\boldsymbol{H}_\pi$.

**命题 2.12** 设 $k\in \mathscr{E}'$,则 $\pi(k):C^\infty(\pi)\to C^\infty(\pi)$.

**证明** 由命题 2.11,只须证明 $\pi(k):C^\infty(\pi)\to C_\omega^\infty(\pi)$,即证

$$(\pi(g)\pi(k)u,\omega)\in C^\infty(G),\quad \forall u\in C^\infty(\pi),\forall\omega\in \boldsymbol{H}_\pi$$

但利用 $\pi(g)^*=\pi(g)^{-1}\triangleq\pi(g^{-1})$,立即有

$$(\pi(g)\pi(k)u,\omega)=(\pi(k)u,\pi(g^{-1})\omega)=$$

$$(k(g'),(\pi(g')u,\pi(g^{-1})\omega))=(k(g'),(\pi(gg')u,\omega))\in C^\infty(G)$$

这里用到 $(\pi(gg')u,\omega)$ 关于 $g$ 解析,关于 $g'$ 为 $C^\infty$. 证毕.

## 2.3　Plancherel 等式

在欧氏空间中约定：

(1) Fourier 变换为 $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$；

(2) Fourier 逆变换为 $\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi$；

(3) $\hat{\delta} = 1$；

(4) Plancherel 公式；$\|\hat{f}\|^2 = (2\pi)^n \|f\|^2$.

已知群 Fourier 变换 $\pi(f)$ 在欧氏空间相当于 Fourier 变换，这里将对群 Fourier 变换建立 Plancherel 公式.

Weyl 型拟微分算子（参阅 Hörmander：The Analysis of Linear Partial Differential Operators III）形如

$$a(x,D)u = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

其中，$a(x,\xi) \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ 为分布，

$$a(x,D) : \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$$

若 $a(x,\xi)$ 为关于 $x,\xi$ 的多项式，则 $a(x,D)$ 为偏微分算子.

**命题 2.13**　对于 Heisenberg 群上的酉表示，成立

$$\pi_{\pm\lambda}(t,q,p) = e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{\frac{1}{2}} q\cdot x + \lambda^{\frac{1}{2}} p\cdot D)} \quad (\lambda > 0)$$

**证明**　利用 1 的 Fourier 变换为 $\delta$，得

$$e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{\frac{1}{2}} q\cdot x + \lambda^{\frac{1}{2}} p\cdot D)} u =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{\frac{1}{2}} q\cdot \frac{x+y}{2} + \lambda^{\frac{1}{2}} p\cdot\xi)} u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} e^{i(x-y+\lambda^{\frac{1}{2}} p)\cdot\xi}\mathrm{d}\xi e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{\frac{1}{2}} q\cdot \frac{x+y}{2})} u(y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-y+\lambda^{\frac{1}{2}} p) e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{\frac{1}{2}} q\cdot \frac{x+y}{2})} u(y)\mathrm{d}y =$$

$$e^{i\left(\pm\lambda t\pm\lambda^{\frac{1}{2}}q\cdot\frac{x+x+\lambda^{\frac{1}{2}}p}{2}\right)}u(x+\lambda^{\frac{1}{2}}p)=$$

$$e^{i\left(\pm\lambda t\pm\lambda^{\frac{1}{2}}q\cdot x\pm\lambda\frac{q\cdot p}{2}\right)}u(x+\lambda^{\frac{1}{2}}p)=\pi_{\pm\lambda}(t,q,p)\pi$$

故而得证.

**命题 2.14** 设 $f\in L^1(H_n)$,则

$$\pi_{\pm\lambda}(f)=\hat{f}(\mp\lambda,\mp\lambda^{\frac{1}{2}}x,-\lambda^{\frac{1}{2}}D)$$

**证明** 注意到 $\pi_{\pm\lambda}(f)$ 和 Weyl 型拟微分算子的定义,有

$$\pi_{\pm\lambda}(f)u=\int_{\mathbf{R}^{2n+1}}f(t,q,p)\pi_{\pm\lambda}(t,q,p)u\mathrm{d}t\mathrm{d}q\mathrm{d}p=$$

$$\int_{\mathbf{R}^{2n+1}}f(t,q,p)e^{i(\pm\lambda t\pm\lambda^{\frac{1}{2}}q\cdot x+\lambda^{\frac{1}{2}}p\cdot D)}u\mathrm{d}t\mathrm{d}q\mathrm{d}p=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^{2n+1}}f(t,q,p)\cdot$$

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}}e^{i(x-y)\cdot\xi}e^{i\left(\pm\lambda t\pm\lambda^{\frac{1}{2}}q\cdot\frac{x+y}{2}+\lambda^{\frac{1}{2}}p\cdot\xi\right)}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}q\mathrm{d}p=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\hat{f}\left(\mp\lambda,\mp\lambda^{\frac{1}{2}}\frac{x+y}{2},-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi\right)e^{i(x-y)\cdot\xi}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi=$$

$$\hat{f}(\mp\lambda,\mp\lambda^{\frac{1}{2}}x,-\lambda^{\frac{1}{2}}D)u$$

故命题得证.

这个命题说明一个函数的酉表示可用 Weyl 型拟微分算子来表示.

**定义 2.11** 设算子 $A$ 是 Hilbert 空间 $H$ 上的有界线性算子,$\{\varphi_j\}$ 是 $H$ 的正交基,若

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|A\varphi_j\|^2<+\infty$$

则称 $A$ 为 Hilbert-Schmidt 算子(或 H-S 算子),且记其 Hilbert-Schmidt 范数为

$$\|A\|_{HS}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|A\varphi_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

有时也用记号 $\sum_{j=1}^{\infty}\|A\varphi_j\|^2=\mathrm{tr}(A^*A)$.

**注 2.7**

(1) $\|A\|_{HS}$ 不依赖于 $\{\varphi_j\}$ 的选取；

(2) $\|A\|\leqslant\|A\|_{HS}$；

(3) 所有 H-S 算子构成一个 Hilbert 空间，其内积为

$$\langle A,B\rangle_{HS}=\sum_{j=1}^{\infty}\langle A\varphi_j,B\varphi_j\rangle$$

(4) $A$ 的算子迹定义为 $\mathrm{tr}A=\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_j,A\varphi_j)$.

**命题 2.15**　设 $k(x,y)\in L^2(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$，$\forall u\in L^2(\mathbf{R}^n)$，令

$$Ku(x)=\int_{\mathbf{R}^n}k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

则 $K$ 是 H-S 算子（定义在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上），且

$$\|K\|_{HS}=\left(\int_{\mathbf{R}^{2n}}|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}=\|k\|_{L^2(\mathbf{R}^{2n})}$$

**证明**　设 $\varphi_j$ 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一组正交基，于是

$$\|K\|_{HS}^2=\sum_j\|K\varphi_j\|^2=\sum_j\int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n}k(x,y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x=$$

$$\sum_j\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n}k(x,y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}^n}\overline{k(x,y')}\,\overline{\varphi_j(y')}\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^{2n}}k(x,y)\overline{k(x,y')}\sum_j\varphi_j(y)\overline{\varphi_j(y')}\mathrm{d}y\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}^{3n}}k(x,y)\overline{k(x,y')}\delta(y-y')\mathrm{d}y\mathrm{d}y'\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}}k(x,y)\overline{k(x,y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}}|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\|k\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2$$

另证：因为 $\|K\|_{HS}^2=\sum_j\|K\varphi_j\|^2$，又 $K\varphi_j=\sum_l(K\varphi_j,$

$\varphi_l)\varphi_l$，及 $\| K\varphi_j \|^2 = \sum_l |(K\varphi_j, \varphi_l)|^2$，因此

$$\| K \|_{HS}^2 = \sum_{l,j} |(K\varphi_j, \varphi_l)|^2 =$$
$$\sum_{l,j} \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} k(x,y)\varphi_j(y)\overline{\varphi}_l(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

注意到 $\varphi_{j,l} = \varphi_l(x)\overline{\varphi}_j(y)$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ 中的正交基，因此

$$\| K \|_{HS}^2 = \sum_{j,l} |(k(x,y), \varphi_l(x)\overline{\varphi}_j(y))|^2 =$$
$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$\| k(x,y) \|^2_{L^2(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)}$$

得证.

**命题 2.16** （Plancherel 公式） 设 $f \in L^2(H_n) \cap L^1(H_n)$，则

$$\| f \|^2_{L^2(H_n)} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty} \| \pi_\lambda(f) \|_{HS}^2 |\lambda|^n \mathrm{d}\lambda$$

这里要求 $f \in L^1(H_n)$，是为了可对 $f$ 作酉表示 $\pi_\lambda(f)$.

**证明** 由定义 2.11、命题 2.14，对 $\lambda > 0$，有

$$\| \pi_{\pm\lambda}(f) \|_{HS}^2 = \sum_j \| \pi_{\pm\lambda}(f)\varphi_j \|^2 =$$
$$\sum_j \| \hat{f}(\mp\lambda, \mp\lambda^{\frac{1}{2}}x, -\lambda^{\frac{1}{2}}D)\varphi_j \|^2$$

注意到

$$\hat{f}(\mp\lambda, \mp\lambda^{\frac{1}{2}}x, -\lambda^{\frac{1}{2}}D)\varphi_j =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\hat{f}(\mp\lambda, \mp\lambda^{\frac{1}{2}}\frac{x+y}{2}, -\lambda^{\frac{1}{2}}\xi)\varphi_j(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

令 $-\lambda^{\frac{1}{2}}\xi = \eta$，则 $(x-y)\cdot\xi = -\dfrac{(x-y)}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\cdot\eta$，就有

$$\hat{f}(\mp\lambda, \mp\lambda^{\frac{1}{2}}x, -\lambda^{\frac{1}{2}}D)\varphi_j =$$
$$\lambda^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}_{1,2}(\mp\lambda, \mp\lambda^{\frac{1}{2}}\frac{x+y}{2}, \lambda^{\frac{1}{2}}(y-x))\varphi_j(y)\mathrm{d}y =$$

$$\lambda^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n} f_{\pm\lambda}(x,y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y$$

就有

$$\|\pi_{\pm\lambda}(f)\|_{HS}^2 = \lambda^n \sum_j \int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n} f_{\pm\lambda}(x,y)\varphi_j(y)\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x =$$

$$\lambda^n \int_{\mathbf{R}^{2n}}\left|\hat{f}_{1,2}\left(\mp\lambda,\mp\lambda^{\frac{1}{2}}\frac{x+y}{2},\lambda^{-\frac{1}{2}}(y-x)\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $\lambda^{\frac{1}{2}}\frac{x+y}{2}=x',\lambda^{-\frac{1}{2}}(y-x)=y'$，其 Jacobi 行列式刚好是 1，

$$\|\pi_{\pm\lambda}(f)\|_{HS}^2 = \lambda^n \int_{\mathbf{R}^{2n}} |\hat{f}_{1,2}(\mp\lambda,\mp x',y')|^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

关于第二个变元用 Parseval 等式，得

$$\|\pi_{\pm\lambda}(f)\|_{HS}^2 = \lambda^{-n}(2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^{2n}} |\hat{f}_1(\mp\lambda,q,p)|^2 \mathrm{d}q\mathrm{d}p$$

所以

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\pi_\lambda(f)\|_{HS}^2 |\lambda|^n \mathrm{d}\lambda =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}(2\pi)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^{2n}} |\hat{f}_1(-\lambda,q,p)|^2 \mathrm{d}\lambda\mathrm{d}q\mathrm{d}p =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^{2n}} |\hat{f}_1(t,q,p)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}q\mathrm{d}p = \|f\|_{L^2(H_n)}^2$$

证毕.

**命题 2.17** （Plancherel 公式的极化形式）

$$\langle f,g\rangle_{L^2(H_n)} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)^*\pi_\lambda(g))\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda$$

**证明** 由平行四边形法则及命题 2.16，有

$$(f,g)_{L^2(H_n)} =$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2-\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2+\mathrm{i}\left\|\frac{f+\mathrm{i}g}{2}\right\|^2-\mathrm{i}\left\|\frac{f-\mathrm{i}g}{2}\right\|^2 =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left\|\pi_\lambda\left(\frac{f+g}{2}\right)\right\|_{HS}^2-\left\|\pi_\lambda\left(\frac{f-g}{2}\right)\right\|_{HS}^2+\right.$$

$$\mathrm{i}\left\|\pi_\lambda\left(\frac{f+\mathrm{i}g}{2}\right)\right\|_{HS}^2-\mathrm{i}\left\|\pi_\lambda\left(\frac{f-\mathrm{i}g}{2}\right)\right\|_{HS}^2\Bigg]|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_j\Bigg[\left\|\frac{\pi_\lambda(f)\varphi_j+\pi_\lambda(g)\varphi_j}{2}\right\|^2-$$

$$\left\|\frac{\pi_\lambda(f)\varphi_j-\pi_\lambda(g)\varphi_j}{2}\right\|^2+\mathrm{i}\left\|\frac{\pi_\lambda(f)\varphi_j+\mathrm{i}\pi_\lambda(g)\varphi_j}{2}\right\|^2-$$

$$\mathrm{i}\left\|\frac{\pi_\lambda(f)\varphi_j-\mathrm{i}\pi_\lambda(g)\varphi_j}{2}\right\|^2\Bigg]|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\infty}^{+\infty}\sum_j(\pi_\lambda(f)\varphi_j,\pi_\lambda(g)\varphi_j)\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_j(\varphi_j,\pi_\lambda(f)^*\pi_\lambda(g)\varphi_j)\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)^*\pi_\lambda(g))\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda$$

证毕.

**命题 2.18** 下式成立:

$$f(t,q,p)=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)^*\pi_\lambda(t,q,p))\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda$$

**证明** 令$(t,q,p)=z$,则利用命题 2.17,有

$$f(z)=\int_{\mathbf{R}^{2n+1}}\delta(z-z')f(z')\mathrm{d}z'=(f(z'),\delta(z-z'))=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)^*\pi_\lambda(\delta(z-z'))\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)^*\pi_\lambda(t,q,p))\,|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda$$

这里用到

$$\pi_\lambda(\delta(z-z'))u=\int_{\mathbf{R}^{2n+1}}\delta(z-z')\pi_\lambda(z')u\mathrm{d}z'=\pi_\lambda(z)u.$$ 证毕.

# 第三章　Heisenberg 群的 Lie 代数

本章 3.1 节考察 Heisenberg 群上的 Lie 代数及光滑向量场；3.2 节考察不变微分算子及卷积算子.

## 3.1　Lie 代数与光滑向量场

**定义 3.1**　设 $\mathcal{G}$ 是域 $F$ 上的线性空间，若存在换位运算 $[X, Y]: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$，满足：

(1) 反交换性：$[X,Y] = -[Y,X]$；

(2) 反线性性：$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z]$；

(3) Jacobi 恒等式：$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

则称 $\mathcal{G}$ 为一个 Lie 代数.

**注 3.1**　若 $\mathcal{G}$ 为有限维的，比如 $n$ 维. 可设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 $\mathcal{G}$ 的基底，$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k$，称 $\{c_{ij}^k\}(i,j,k = 1,\cdots,n)$ 为 $\mathcal{G}$ 的结构常数. 定义中的三个条件可通过结构常数的相应关系表示出来，反之也对.

设 $M$ 是 $n$ 维 $C^\infty$ 流形，$TM$ 是 $M$ 的切丛，称 $\mathcal{X}_x: x \to T_xM$（$T_xM$ 是 $x \in M$ 处的切空间）的映射为光滑向量场，若 $f \in C^\infty(M)$ 时，有 $(\mathcal{X}_x f)(x) \in C^\infty(M)$.

**命题 3.1**　在局部坐标系下，光滑向量场可表示为

$$\mathcal{X}_x = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial xj}, \quad a_j(x) \in C^\infty(M)$$

**命题 3.2**　在光滑流形 $M$ 上所有光滑向量场所构成的线性空间中，引进换位运算

$$[\mathcal{X},\mathcal{Y}]=\mathcal{X}\mathcal{Y}-\mathcal{Y}\mathcal{X}$$

则可构成一个 Lie 代数.

**证明** 先证运算的封闭性. 由命题 3.1,可设

$$\mathcal{X}=\sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad \mathcal{Y}=\sum b_l(x)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

易知

$$\mathcal{X}\mathcal{Y}-\mathcal{Y}\mathcal{X}=\sum c_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

其中

$$c_k(x)=\sum\left(a_j(x)\frac{\partial b_k}{\partial x_j}-b_j(x)\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)$$

所以$[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$是光滑向量场.

容易验证定义 3.1 中的三条. 证毕.

**定义 3.2** 设$\mathcal{X}$是 Lie 群 $G$ 上的一个光滑向量场,设 $g\in G$,令左平移 $L_g:C^\infty(G)\to C^\infty(G)$ 为

$$L_gf(\omega)=f(g\cdot\omega)$$

若对 $\forall g\in G$,有 $L_g\circ\mathcal{X}=\mathcal{X}\circ Lg$,则称$\mathcal{X}$为左平移不变向量场.

**命题 3.3** $G$ 上所有左不变向量场构成 Lie 代数$\mathcal{G}$,且其维数为 $n$($G$ 的维数),且$\mathcal{G}$同构于 $T_eG$.

**证明** 设$\mathcal{X},\mathcal{Y}$是左不变向量场,定义

$$[\mathcal{X},\mathcal{Y}]=\mathcal{X}\mathcal{Y}-\mathcal{Y}\mathcal{X}$$

则

$$\begin{aligned}L_g\circ[\mathcal{X},\mathcal{Y}]=L_g\circ(\mathcal{X}\mathcal{Y}-\mathcal{Y}\mathcal{X})=\\ L_g\mathcal{X}\mathcal{Y}-L_g\mathcal{Y}\mathcal{X}=\mathcal{X}L_g\mathcal{Y}-\mathcal{Y}L_g\mathcal{X}=\\ \mathcal{X}\mathcal{Y}L_g-\mathcal{Y}\mathcal{X}L_g=[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\circ L_g\end{aligned}$$

所以$[X,Y]$为左不变的,故换位运算是封闭的.

现证$\mathcal{G}$同构于$T_eG$. 任取$\mathcal{X}\in\mathcal{G}$,因为$L_g\circ\mathcal{X}=\mathcal{X}\circ L_g$,所以$L_g(\mathcal{X}f)=\mathcal{X}L_g(f)$,即$\mathcal{X}f(g\omega)=\mathcal{X}(f(g\omega))$,所以

$$\mathcal{X}_{g\omega}(f)=\mathcal{X}_w(L_gf)$$

令 $\omega = e$，则 $\mathscr{X}_g(f) = \mathscr{X}_e(L_g f)$. 因为 $\mathscr{X}_e \in T_eG$，所以 $\mathscr{X}$ 对应了 $T_eG$ 中的一个元素.

反之，对 $\forall D_0 \in T_eG$，令 $(\mathscr{X}^0 f)(g) = D_0(L_g f)$，则它是一个光滑向量场，且由于 $L_g L_h f(\omega) = L_g f(h\omega) = f(hg\omega) = L_{hg} f(\omega)$，所以 $L_g L_h = L_{hg}$，从而

$$(\mathscr{X}^0 L_h f)(g) = D_0(L_g L_h f) =$$

$$D_0(L_{hg} f) = \mathscr{X}^0(f)(hg) = L_h(\mathscr{X}^0 f)(g)$$

即得 $\mathscr{X}^0 L_h f = L_h \mathscr{X}^0 f$，即 $\mathscr{X}^0$ 是一个左不变的向量场. 因此 $T_eG$ 中的任一元对应了 $\mathscr{G}$ 中一个向量场. 证毕.

**例 3.1** Heisenberg 群 $H_n$.

由于 $(t,q,p) \cdot (t',q',p') = (t + t' + \frac{1}{2} p \cdot q' - \frac{1}{2} q \cdot p', q + q', p + p')$，$T_eH_n$ 的基底为 $\left\{\frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial q_1'}, \cdots, \frac{\partial}{\partial q'_n}, \frac{\partial}{\partial p'_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial p'_n}\right\}$，因而设 $\frac{\partial}{\partial p'_j}$ 与 $M_j, j = 1, \cdots, n$，相对应，则

$$M_j f(t,q,p) = \frac{\partial}{\partial p'_j}(L_g f) =$$

$$\frac{\partial}{\partial p'_j} f\left(t + t' + \frac{1}{2} p \cdot q' - \frac{1}{2} q \cdot p', q + q', p + p'\right)\bigg|_{g=e} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_j}(t,q,p) - \frac{1}{2} q_j \frac{\partial f}{\partial t}(t,q,p) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{1}{2} q_j \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t,q,p)$$

类似地，设 $L_j$ 与 $\frac{\partial}{\partial q'_j}, j = 1, 2, \cdots, n$，相对应，则有

$$L_j f(t,q,p) = \left(\frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2} p_j \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t,q,p)$$

设 $T$ 与 $\frac{\partial}{\partial t'}$ 相对应，有

$$T = \frac{\partial}{\partial t}$$

且可证明$[L_j, M_j] = -T$，$[M_j, L_j] = T$，而其余换位均为 0.

**引理 3.1** 设$\mathfrak{X}$是Lie群$G$的一个左不变向量场，则存在唯一的解析曲线$\alpha_{\mathfrak{X}}(t):\mathbf{R} \to G$，满足：

(1)$\alpha_{\mathfrak{X}}(0) = e \in G$；

(2) 存在$\varepsilon > 0$，当$|t| < \varepsilon$时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{\mathfrak{X}}(t) = \mathfrak{X}\alpha_{\mathfrak{X}}(t)$$

(3) $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}$，$\alpha_{\mathfrak{X}}(t_1)\alpha_{\mathfrak{X}}(t_2) = \alpha_{\mathfrak{X}}(t_1 + t_2)$.

条件(3) 表明曲线是封闭的，证明参阅参考文献[13].

**定义 3.3** 上述$\alpha_{\mathfrak{X}}(t)$称为$G$的对应于$\mathfrak{X}$的单参数子群，记为$\mathrm{e}^{t\mathfrak{X}}$.

**定义 3.4** 设$\mathfrak{X} \in \mathcal{G}$，定义

$$\pi(\mathfrak{X})u = \lim_{t \to 0}\frac{\pi(\exp t\mathfrak{X})u - u}{t}, \quad u \in \boldsymbol{H}_\pi$$

如上述极限存在. 若$u \in C_\pi^\infty$，则上述极限一定存在.

**注 3.2**

$$\pi(\mathfrak{X})u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(\exp t\mathfrak{X})u\Big|_{t=0} =$$

$$\mathfrak{X}_{\pi(\exp t\mathfrak{X})}u\big|_{t=0} = \mathfrak{X}_{\pi(\omega)}u\big|_{\omega=e}$$

**例 3.2** 在 Heisenberg 群$H_n$上，已知

$$M_j = \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{1}{2}q_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad L_j = \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2}p_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

$\pi_{\pm\lambda}(t,q,p)u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\lambda t \pm |\lambda|^{\frac{1}{2}}q\cdot x \pm \lambda\frac{1}{2}p\cdot q)}f(x + \lambda^{\frac{1}{2}}p)$，则

$\pi_{\pm\lambda}(L_j)u(x) =$

$$L_j(\pi_{\pm\lambda}(t,q,p)u(x))\big|_{(t,q,p)=(0,0,0)} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2}p_j\frac{\partial}{\partial t}\right)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\lambda t \pm \lambda^{\frac{1}{2}}q\cdot x \pm \frac{\lambda}{2}p\cdot q)}u(x + \lambda^{\frac{1}{2}}p)\big|_{(0,0,0)} =$$

$\mathrm{i}(\pm\lambda^{\frac{1}{2}})x_j u(x)$

因此
$$\pi_{\pm\lambda}(L_j)=\pm\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{i}x_j$$

同理：$\pi_{\pm\lambda}(M_j)u=\lambda^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$，因此 $\pi_{\pm\lambda}(M_j)=\lambda^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. 此外，$\pi_{\pm\lambda}(T)=\pm\lambda\mathrm{i}$.

## 3.2　不变微分算子与卷积算子

通过和表示有关的运算，左不变微分算子的刻划，加上 Plancherel 公式，可用来解决微分方程的一些问题. 为此，现利用 $\pi(g):\boldsymbol{H}_\pi\to\boldsymbol{H}_\pi(g\in G)$ 和 $\pi(f)(f\in\mathscr{E}'$ 或 $f\in L^1)$ 来证明
$$\pi(\mathscr{X})(\mathscr{X}\in\mathscr{G}):\boldsymbol{C}_\pi^\infty\to\boldsymbol{C}_\pi^\infty$$

证明下列命题：

**命题 3.4**　设 $\mathscr{X}\in\mathscr{G}$，$\boldsymbol{u}\in C_\pi^\infty$，则
$$\mathscr{X}(\pi(g)\boldsymbol{u})=\pi(g)\pi(\mathscr{X})\boldsymbol{u}$$
这里 $\pi(g)\boldsymbol{u}$ 是从 $G$ 到 $\boldsymbol{H}_\pi$ 的光滑映射.

**证明**　因为左不变向量场与原点处向量场同构，所以
$$\mathscr{X}(\pi(g)\boldsymbol{u})=[\mathscr{X}\pi(gh)\boldsymbol{u}]_{h=e}=$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi(g\cdot\exp t\mathscr{X})]\boldsymbol{u}\,|_{t=0}=$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\pi(g)\pi(\exp t\mathscr{X})\boldsymbol{u}]\,|_{t=0}=\pi(g)\pi(\mathscr{X})\boldsymbol{u}$$
证毕.

**命题 3.5**　$\pi(\mathscr{X}):\boldsymbol{C}_\pi^\infty\to\boldsymbol{C}_\pi^\infty$

**证明**　设 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}_\pi^\infty$，令 $\pi(\mathscr{X})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，要证 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}_\pi^\infty$. 由
$$\pi(g)\boldsymbol{v}=\pi(g)\pi(\mathscr{X})\boldsymbol{u}=\mathscr{X}(\pi(g)\boldsymbol{u})$$
又因为 $\pi(g)\boldsymbol{u}\in C^\infty(G\to\boldsymbol{H}_\pi)$，$\mathscr{X}$ 是具 $C^\infty$ 系数的一阶微分算子，因而 $\pi(g)\boldsymbol{v}\in C^\infty(G\to\boldsymbol{H}_\pi)$，所以 $\boldsymbol{v}\in C_\pi^\infty$. 证毕.

**推论 3.1** $\pi[\mathcal{X},\mathcal{Y}]=[\pi(\mathcal{X}),\pi(\mathcal{Y})]$，这里等号右边为 $\pi(\mathcal{X})\pi(\mathcal{Y})-\pi(\mathcal{Y})\pi(\mathcal{X})$.

**证明** 由于命题 3.4，有

$$\begin{aligned}\pi(g)[\pi(\mathcal{X}),\pi(\mathcal{Y})]\boldsymbol{u}&=\pi(g)[\pi(\mathcal{X})\pi(\mathcal{Y})\boldsymbol{u}-\pi(\mathcal{Y})\pi(\mathcal{X})\boldsymbol{u}]=\\&\mathcal{X}(\pi(g)\pi(\mathcal{Y})\boldsymbol{u}-\mathcal{Y}(\pi(g)\pi(\mathcal{X})\boldsymbol{u})=\\&\mathcal{X}\mathcal{Y}(\pi(g)\boldsymbol{u})-\mathcal{Y}\mathcal{X}(\pi(g)\boldsymbol{u})=\\&[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\pi(g)\boldsymbol{u}=\pi(g)\pi[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

取 $g=e,\pi(g)=I$，得证.

现在考虑 $\pi(\mathcal{X}f)$.

**命题 3.6** $\pi(\mathcal{X}f)=-\pi(f)\pi(\mathcal{X})$，这里 $f\in\mathscr{E}'(G)$ 或 $f$ 及$\mathcal{X}f\in L^1(G)$.

**证明** 取 $\boldsymbol{u}\in C_\pi^\infty$，则由 $\mathrm{d}g$ 为左不变测度，得

$$\pi(\mathcal{X}f)\boldsymbol{u}=\int_G\mathcal{X}f(g)\pi(g)\boldsymbol{u}\mathrm{d}g=$$
$$\int_G f(g)\,\mathcal{X}^t\pi(g)\boldsymbol{u}\mathrm{d}g$$

因为在左不变测度下，$\mathcal{X}^t=-\mathcal{X}$，所以

$$\pi(\mathcal{X}f)\boldsymbol{u}=-\int_G f(g)\,\mathcal{X}\pi(g)\boldsymbol{u}\mathrm{d}g=$$
$$-\int_G f(g)\pi(g)\pi(\mathcal{X})\boldsymbol{u}\mathrm{d}g=$$
$$-\pi(f)\pi(\mathcal{X})\boldsymbol{u}$$

而且 $\pi(\mathcal{X}f)\boldsymbol{u}=-\int_G f(g)\,\mathcal{X}\pi(g)\boldsymbol{u}\mathrm{d}g=\int_G f(g)\,\mathcal{X}^t\pi(g)\boldsymbol{u}\mathrm{d}g=\pi(f)\pi(\mathcal{X}^t)\boldsymbol{u}$

证毕.

**推论 3.2** 在命题 3.6 的假定下，

$$\pi(\mathcal{X}\mathcal{Y}f)=-\pi(\mathcal{Y}f)\pi(\mathcal{X})=$$
$$\pi(f)\pi(\mathcal{Y})\pi(\mathcal{X})=\pi(f)\pi(\mathcal{Y}^t)\pi(\mathcal{X}^t)$$

一般，若令 $P(\mathcal{X})=\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m}a_\alpha\mathcal{X}_{\alpha_1}\mathcal{X}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{X}_{\alpha_k}$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,$

$\alpha_k)$, $1 \leqslant \alpha_j \leqslant n$, $\{\mathscr{X}_j\}$, $j = 1, \cdots, n$ 为 $\mathscr{G}$ 的基, $a_\alpha$ 为常数,则

$$\pi(P(\mathscr{X})f) = \pi(f) \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} a_\alpha \pi(\mathscr{X}_{\alpha_k}^t) \cdots \pi(\mathscr{X}_{\alpha_1}^t)$$

**命题 3.7** $\mathscr{X}(f_1 * f_2) = f_1 * \mathscr{X} f_2$,其中 $\mathscr{X}$ 是左不变向量场, $f_1, f_2 \in \mathscr{E}'(G)$.

**证明** 由卷积定义,可得

$$\mathscr{X}(f_1 * f_2) = \mathscr{X} \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) \mathrm{d}y =$$

$$\int_G f_1(y) \mathscr{X} f_2(y^{-1}x) \mathrm{d}y =$$

$$\int_G f_1(y)(\mathscr{X} f_2)(y^{-1}x) \mathrm{d}y = f_1 * \mathscr{X} f_2$$

证毕.

以 $\mathscr{A}$ 记所有 $P(\mathscr{X})$ 的集合,称为 Lie 群的万有包络代数 (universal enveloping algebra). 以 $\mathscr{B}$ 记 $G$ 上所有光滑系数的左不变线性偏微分算子的集合. 记

$$P(x, D_x) = \sum_{\alpha \leqslant m} a_\alpha(x) D_\alpha, \quad a_\alpha(x) \in C^\infty(G)$$

则有

$$L_h P(x, D_x) = P(x, D_x) L_h, \quad \forall h \in G$$

以 $\mathscr{C}$ 记所有具性质

$$Ku = u * k, \quad k \in \mathscr{E}'(G), \mathrm{supp} k = \{e\}$$

的左卷积算子的集合.

**定理 3.1** $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{C}$

**证明** (1) $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$;

由 $P(\mathscr{X}) = \sum a_\alpha \mathscr{X}_{\alpha_1} \cdots \mathscr{X}_{\alpha_k}$, 及 $\mathscr{X}_j L_h = L_h \mathscr{X}_j (\forall j)$, 知 $L_h P(\mathscr{X}) = P(\mathscr{X}) L_h$,

(2) $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$;

设 $P(x, D) \in \mathscr{B}$, 由 $P(x, D)$ 左不变,得

$$P(x,D)u = P(x,D)(u * \delta) = P(x,D)\int_G u(y)\delta(y^{-1}x)\mathrm{d}y =$$

$$\int_G u(y)(P(x,D)\delta)(y^{-1}x)\mathrm{d}y = u * (P(x,D)\delta)$$

由于 $\mathrm{supp}(P(X,D)\delta) = \{e\}$，得证.

(3) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$；

设 $Ku = u * k$，$\mathrm{supp}k = \{e\}$，则 $k(x) = \sum_{\alpha \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \delta(x) := P(D)\delta(x)$. 由于

$$\mathcal{X}_j = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j = 1,\cdots,n$$

又 $(\mathcal{X}_j)_e = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$，因而

$$a_{jl}(0) = \delta_{jl}, \quad \det(a_{jl}(0)) = 1$$

这里 $\delta_{jl}$ 为 Kronecker 符号. 在单位元 $e$ 附近，$\det(a_{jl}(x)) > 0$. 于是可解出 $\dfrac{\partial}{\partial x_l}$（用 $\mathcal{X}_1,\cdots,\mathcal{X}_n$ 表出）：

$$\frac{\partial}{\partial x_l} = \sum b_{jl}(x)\ \mathcal{X}_j$$

又 $\forall \varphi \in C_0^\infty$，

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_l},\varphi\right) = \left(\delta(x), -\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\right) = (\delta(x), -\sum_j b_{jl}(x)\ \mathcal{X}_j\varphi(x)) =$$

$$-\sum_j b_{jl}(0)(\mathcal{X}_j\varphi(x))\mid_{x=0} = \left(\sum_j b_{jl}(0)\ \mathcal{X}_j\delta(x),\varphi\right)$$

因此 $\dfrac{\partial\delta}{\partial x_l} = \sum_j b_{jl}(0)\ \mathcal{X}_j\delta$，于是

$$Ku = u * k = u * (\sum_{\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \delta(x)) =$$

$$u * \sum_{\alpha \leqslant m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\delta =$$

$$u * \sum_{\alpha| \leqslant m} a_\alpha \prod_{j=1}^{n} (\sum b_{jl}(0)\ \mathcal{X}_l)^{\alpha_j}\delta =$$

$$u * \sum_{N \leqslant m} b_\beta \mathcal{X}_{\beta_1} \cdots \mathcal{X}_{\beta_N} \delta = u * Q_m(\mathcal{X})\delta =$$
$$Q_m(\mathcal{X})(u * \delta) = Q_m(\mathcal{X})u$$

其中 $Q_m(\mathcal{X})$ 左不变,至此定理 3.1 全部证完.

# 第四章　Kohn-Laplace 算子的基本解

回忆 1.3 节，已经知道 Heisenberg 群 $H_n$ 是在空间 $\{(x,y,t): x,y \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}\}$ 上赋予群运算

$$(x,y,t)(x',y',t') = (x+x', y+y', t+t' - \frac{1}{2}x \cdot y' + \frac{1}{2}y \cdot x') \tag{4.1}$$

而形成的空间（其中 $x \cdot y' = \sum_{j=1}^{n} x_j y'_j$）.

记 $H_n$ 的 Lie 代数为 $h_n$，它由 $H_n$ 上的所有左不变向量场构成，基底为

$$\left.\begin{aligned} L_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \cdots, n \\ M_j &= \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \cdots, n \\ T &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

算子

$$\mathcal{L}_\mu = -\sum_{j=1}^{n} (L_j^2 + M_j^2) + \mathrm{i}\mu T \tag{4.3}$$

被称为 Kohn-Laplace 算子，其中 $\mu$ 为一个复数. 该算子起源于复几何，且与量子物理学密切相关，见参考文献[19－20,50]，其具有本质上的研究意义，且是研究一般变系数偏微分算子的起点和模型. 在过去数十年里，该算子得到了广泛的研究，揭示了一系列重要性质，见参考文献[2,19－20,27－28,49－50].

本章考虑 Heisenberg 群上的 Kohn-Laplace 算子的基本解，这

里 Kohn-Laplace 算子可展开为

$$\mathcal{L}_\mu = -\sum_{j=1}^{n}(L_j^2 + M_j^2) + \mathrm{i}\mu T =$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(y_j\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)\frac{\partial}{\partial t}$$

$$+\frac{1}{4}(x_j^2 + y_j^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big] + \mathrm{i}\mu\frac{\partial}{\partial t}$$

当 $\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\neq 0$ 时，$\mathcal{L}_\mu$ 是椭圆的；当 $\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)=0$ 时，$\mathcal{L}_\mu$ 是退化椭圆的. 利用例 3.1 和例 3.2 有

$$\pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu) = -\sum_{j=1}^{n}|\lambda|\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - |x_j^2| - \mu\lambda = |\lambda|[(-\Delta + |x|^2)\mp\mu]\Big)$$

对后者，可用 Hermite 展开.

本章 4.1 节简单介绍 Hermite 函数；4.2 节形式地求解基本解；4.3 节给出严格论证；4.4 节讨论局部可解性与亚椭圆性.

## 4.1 Hermite 函数

**定义 4.1** 设 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$；称函数

$$\phi_\alpha(x) = (2^{|\alpha|}\alpha!)^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{n}{4}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|x|^2}\partial_x^\alpha\mathrm{e}^{-|x|^2},\quad \forall x\in\mathbf{R}^n$$

为具有指标 $\alpha$ 的 Hermite 函数.

性质：

(1) 显然，$\phi_\alpha(x)$ 形为 $P_\alpha(x)\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$，这里 $P_\alpha(x)$ 为多项式，因而 $\phi_\alpha(x)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

(2) $\{\phi_\alpha(x)\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的完备、规范化正交基，

$$(\phi_\alpha,\phi_\beta)_{L^2} = \begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

(3) $\hat{\phi}_\alpha = -\mathrm{i}^{|\alpha|}\phi_\alpha$.

(4) $(-\Delta_x+|x|^2)\phi_\alpha(x)=(2|\alpha|+n)\phi_\alpha(x)$，即 $\phi_\alpha(x)$ 为 Hermite 算子 $-\Delta+|x|^2$ 的特征函数.

(5)Mehler 公式见参考文献[17]：当 $\tau\in\mathbf{C}$，$|\tau|<1$，$x,y\in\mathbf{R}^n$ 时，

$$\sum_\alpha \tau^{\alpha}\phi_\alpha(x)\phi_\alpha(y)=$$

$$\pi^{-\frac{n}{2}}(1-\tau^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{\frac{4\tau xy-(1+\tau^2)(|x|^2+|y|^2)}{2(1-\tau^2)}\right\}:=$$

$$K(\tau,x,y)$$

在 $\{|\tau|<1,(x,y)\in\mathbf{R}^{2n}\}$ 的任一紧子集上绝对一致收敛. 若固定 $\tau,x$，则其关于 $y$ 可积.

## 4.2 求 解

设 $u(t,x,y)=u$ 满足

$$\mathcal{L}_\mu u=\delta(t,x,y)$$

作酉表示，得

$$\pi_{\pm\lambda}(u)\pi_{\pm\lambda}(\mathcal{L}_\mu)=I,\quad(\lambda>0)$$

即

$$\pi_{\pm\lambda}(u)[|\lambda|(-\Delta+|\xi|^2\mp\mu]=I\tag{4.4}$$

回忆命题 2.18，有

$$u(t,x,y)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}(\pi_{\pm\lambda}(u)^*\pi_{\pm\lambda}(t,x,y)|\lambda|^n d\lambda=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_\alpha(\pi_{\pm\lambda}(t,x,y)\phi_\alpha,\pi_{\pm\lambda}(u)\phi_\alpha)|\lambda|^n d\lambda\tag{4.5}$$

由式(4.1) 及 $\phi_\alpha$ 的性质(4)，知

$$\pi_{\pm\lambda}(u)\phi_\alpha(\xi)=|\lambda|^{-1}\frac{1}{2|\alpha|+n\mp\mu}\phi_\alpha(\xi)$$

这里要求 $\mu \neq \pm(2m+n), m=0,1,2,\cdots$,或 $|\mu|<n$. 又因为

$$\pi_{\pm\lambda}(t,x,y)\phi_\alpha(\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\lambda t\pm\lambda^{\frac{1}{2}}\xi\cdot x\pm\frac{1}{2}\lambda x\cdot y)}\phi_\alpha(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)$$

所以

$$u(t,x,y)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\lambda t\pm\lambda^{\frac{1}{2}}x\cdot\xi\pm\lambda\frac{x\cdot y}{2})}\cdot$$

$$\sum_\alpha\frac{1}{2|\alpha|+n\mp\mu}\phi_\alpha(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)\phi_\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi\,|\lambda|^{n-1}\mathrm{d}\lambda$$

注意到

$$\frac{1}{2|\alpha|+n\mp\mu}=\frac{1}{2}\frac{1}{|\alpha|+\frac{n\mp\mu}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^1\tau^{|\alpha|+\frac{n\mp\mu}{2}-1}\mathrm{d}\tau$$

所以由 Mehler 公式得

$$\sum_\alpha\frac{1}{2|\alpha|+n\mp\mu}\phi_\alpha(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)\phi_\alpha(\xi)=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\tau^{\frac{n\mp\mu}{2}-1}\sum_\alpha\tau^{|\alpha|}\phi_\alpha(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)\phi_\alpha(\xi)\mathrm{d}\tau=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\tau^{\frac{n\mp\mu}{2}-1}K(\tau,\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y,\xi)\mathrm{d}\tau=$$

$$\frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\int_0^1(1-\tau^2)^{-\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n\mp\mu}{2}-1}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{4\tau\xi(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)-(1+\tau^2)(|\xi|^2+|\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y|^2)}{2(1-\tau^2)}\right\}\mathrm{d}\tau$$

先对 $\xi$ 积分,计算得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\lambda^{\frac{1}{2}}x\cdot\xi)}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{4\tau\xi(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)-(1+\tau^2)(|\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y|^2+|\xi|^2}{2(1-\tau^2)}\mathrm{d}\xi\right\}=$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mp\lambda^{\frac{1}{2}}x\cdot\xi)}\mathrm{e}^{\frac{1-\tau}{1+\tau}\left|\xi+\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}y\right|^2}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{-\frac{1+\tau}{1-\tau}\lambda\cdot\frac{|y|^2}{4}}\ (\text{令 }\eta=\xi+\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}y)=$$

$$\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\mp\frac{\lambda}{2}x\cdot y} e^{-\frac{1+\tau}{1-\tau}\lambda\frac{|x|^2+|y|^2}{4}}$$

因此

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\lambda t}\int_0^1 \tau^{\frac{n\mp\mu}{2}}(1-\tau^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot$$

$$\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1+\tau}{1-\tau}\lambda\frac{|x|^2+|y|^2}{4}} d\tau \mid \lambda \mid^{n-1} d\lambda =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{n+1}}\int_0^1 \tau^{\frac{n\mp\mu}{2}-1}(1-\tau^2)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot$$

$$2\mathrm{Re}\int_{\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{-\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\lambda} \mid \lambda \mid^{n-1} d\lambda d\tau$$

利用

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-it}\lambda^{n-1} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\lambda a}\lambda^{n-1} d\tau$$

因为 $a = \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{|x|^2+|y|^2}{4} - it, \mathrm{Re}a > 0$,所以

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-it}\lambda^{n-1} d\tau = (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\int_0^{\infty} e^{-a\lambda} d\lambda =$$

$$(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

有

$u(t,x,y) =$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}}\mathrm{Re}\int_0^1 \tau^{\frac{n\mp\mu}{2}-1}(1-\tau^2)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{|x|^2+|y|^2}{4} - it\right)^n} d\tau =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}}\mathrm{Re}\int_0^1 \frac{\tau^{\frac{n\mp\mu}{2}}-1}{\left((1+\tau)\frac{|x|^2+|y|^2}{4} - i(1-\tau)t\right)^n} d\tau$$

关于这里的积分，注意到在 $\tau = 0$ 处，当 $\frac{n \mp \mu}{2} \leqslant 0$，即 $|\mu| \geqslant n$ 时，有奇性. 所以

$u(t, x, y) =$

$$\frac{(n-1)!}{2(2\pi)^{n-1}}\int_0^1\left[\tau^{\frac{n+\mu}{2}-1}(1-\tau)^{-n}\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{-n}+\right.$$

$$\left.\tau^{\frac{n-\mu}{2}-1}(1-\tau)^{-n}\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{-n}\right]\mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{(n-1)!}{2(2\pi)^{n-1}}\int_0^1\left[\tau^{\frac{n+\mu}{2}-1}\left((1+\tau)\,\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+(1-\tau)\mathrm{i}t\right)^{-n}+\right.$$

$$\left.\tau^{\frac{n-\mu}{2}-1}\left((1+\tau)\,\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-(1-\tau)\mathrm{i}t\right)^{-n}\right]\mathrm{d}\tau$$

令 $\tau = \mathrm{e}^{-2s}$，则

$$1 \pm \tau = 1 \pm \mathrm{e}^{-2s} = 2\mathrm{e}^{-s}\,\frac{e^{s} \pm e^{-s}}{2} = 2\mathrm{e}^{-s}\begin{cases}\mathrm{ch}s, \text{取} + \text{号}\\ \mathrm{sh}s, \text{取} - \text{号}\end{cases}$$

$$u(t, x, y) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}2^n}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\mathrm{ch}s+\mathrm{i}t\mathrm{sh}s\right)^n}+\right.$$

$$\left.\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mu s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\mathrm{ch}s-\mathrm{i}t\mathrm{sh}s\right)^n}\right] =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}2^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mu s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\mathrm{ch}s-\mathrm{i}t\mathrm{sh}s\right)^n}$$

令 $\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，则

$$\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\mathrm{ch}s \pm \mathrm{i}t\mathrm{sh}s =$$

$$R(\mathrm{ch}s\cos\phi \pm \mathrm{i}\,\mathrm{sh}s\sin\phi) = R\mathrm{ch}(s \pm \mathrm{i}\phi)$$

$$u(t, x, y) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}2^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mu s}\,\frac{\mathrm{d}s}{R^n[\mathrm{ch}(s-\mathrm{i}\phi)]^n} =$$

$$(令\ s-\mathrm{i}\phi=s',即\ s=s'+\mathrm{i}\phi)$$

$$\frac{(n-1)!\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}}{(2\pi)^{n+1}2^nR^n}\int_{\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mu s'}\frac{\mathrm{d}s'}{(\mathrm{ch}s')^n}=C_\mu\frac{(n-1)!\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}}{(2\pi)^{n+1}2^n}R^{-n}$$

利用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^\mu=R^{-\mu}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^\mu=R^{-\mu}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{\mathrm{i}\mu}$，有

$$u(t,x,y)=C_\mu\frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}2^n}R^{-n-\mu}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^\mu=$$

$$C_\mu\frac{(n-1)!}{(2\pi)^{n+1}2^n}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n-\mu}{2}}$$

这里用到

$$R=\left[\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\right)+t^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

下面计算 $C_\mu$：

$$C_\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mu s}\frac{\mathrm{d}s}{(\mathrm{ch}s)^n}(令\ \mathrm{e}^{\ 2s}=\tau)=$$

$$2^{n-1}\int_0^{+\infty}\tau^{\frac{n+\mu}{2}-1}(1+\tau)^{\ n}\mathrm{d}\tau=$$

$$2^{n-1}B\left(\frac{n+\mu}{2},\frac{n-\mu}{2}\right)=$$

$$2^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)}{\Gamma(n)}=$$

$$2^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)}{(n-1)!}$$

因而

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{\frac{n-\mu}{2}}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{\frac{n+\mu}{2}} \tag{4.6}$$

上式的解在原点有很高的奇性.

**注 4.1**　$\Gamma(k)$ 是亚纯函数,$\Gamma(x)(x>0)$ 可延拓到全面上,除掉 $0,-1,-2,\cdots$,故上述基本解对 $\frac{n+\mu}{2}\neq -m(m=0,1,2,\cdots)$ 成立,即 $\pm\mu\neq -2m-n$,即 $|\mu|\neq n+2m(m=0,1,2,\cdots)$ 成立.

**注 4.2**　奇点在 $(x,y,t)=(0,0,0)$ 处,其余均不是奇点.

**注 4.3**　若 $\mathcal{L}_\mu u_\mu(t,x,y)=\delta(t,x,y)$,记 $(t,x,y)=w,(t',x',y')=w'$,要求 $u(w,w')$,满足 $\mathcal{L}_\mu u=\delta(w'^{-1}w)$. 已知 $\mathcal{L}_\mu u_\mu(w)=\delta(w)$,作左平移

$$L_{w'^{-1}}\mathcal{L}_\mu u_\mu(w)=\delta(w'^{-1}w)$$

即

$$\mathcal{L}_\mu u_\mu(w'^{-1}w)=\delta(w'^{-1}w)$$

故取 $U=u_\mu(w'^{-1}w)$,即得奇点在 $w'$ 处的基本解.

**注 4.4**　为求解方程 $\mathcal{L}_\mu g=f(w),f\in C_0^\infty(H_n)$,由 $\mathcal{L}_\mu U=\delta(w'^{-1}w)$,得

$$\mathcal{L}_\mu\int_{H_n}f(w')U(w',w)\mathrm{d}w'=$$

$$\int_{H_n}f(w')\delta(w'^{-1}w)\mathrm{d}w'=f(w)$$

故所求解为

$$g(w)=\int_{H_n}f(w')U(w'^{-1}w)\mathrm{d}w'=f*u$$

进一步,考虑算子 $\mathcal{L}'_\mu=-\sum_{j=1}^n a_j(L_j^2+M_j^2)+\mathrm{i}\mu T,a_j>0$,求基本解 $u$:$\mathcal{L}'_\mu u=\delta(t,x,y)$. 与前类似,有

$$\pi_{\pm\lambda}(u)\pi_{\pm\lambda}(\mathcal{L}'_\mu)=I$$

及

$$u(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\alpha}(\pi_{\pm\lambda}(t,x,y)\phi_{\alpha},\pi_{\pm\lambda}(u)\phi_{\alpha})\mid\lambda\mid^{n}\mathrm{d}\lambda$$

由于 $\pi_{\pm\lambda}(u)\left[\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\xi_j^2-\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\right)\mp\mu\right]\mid\lambda\mid=I$,将之作用于 $\phi_{\alpha}$:

$$\mid\lambda\mid\pi_{\pm\lambda}(u)\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\xi_j^2-\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\right)\mp\mu\right)\phi_{\alpha}=\phi_{\alpha}$$

得

$$\left(\sum_{j=1}^{n}2a_j\alpha_j+a\mp\mu\right)\mid\lambda\mid\pi_{\pm\lambda}(u)\phi_{\alpha}=\phi_{\alpha}$$

这里 $a=\sum_{j=1}^{n}a_j$,于是

$$\pi_{\pm\lambda}(u)\phi_{\alpha}=\frac{\mid\lambda\mid^{-1}}{2\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_j+a\mp\mu}\phi_{\alpha}$$

与上面一样,须计算

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{2\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_j+a\mp\mu}\phi_{\alpha}(\xi)\phi_{\alpha}(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)$$

因为

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{2\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_j+a\mp\mu}\phi_{\alpha}(x)\phi_{\alpha}(y)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int_0^1 s^{\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_j+\frac{a\mp\mu}{2}-1}\mathrm{d}s\phi_{\alpha}(x)\phi_{\alpha}(y)$$

而

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}s^{\sum_{j=1}^{n}a_j}\phi_{\alpha}(x)\phi_{\alpha}(y)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\tau_1^{\alpha_1}\cdots\tau_n^{\alpha_n}\phi_{\alpha}(x)\phi_{\alpha}(y)\overset{(\text{令 }\tau_j=s^{a_j})}{=\!=}$$

$$\frac{1}{2}\sum\tau_1^{\alpha_1}\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_1}(y_1)\cdots\tau_n^{\alpha_n}\phi_{\alpha_n}(x_n)\phi_{\alpha_n}(y_n)=$$

$$\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j}\tau_j^{\alpha_j}\phi_{\alpha_j}(x)\phi_{\alpha_j}(y)$$

$$\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}\left[\pi^{-\frac{1}{2}}(1-\tau_j^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{4\tau_jx_jy_j-(1+\tau_j^2)(x_j^2+y_j^2)}{1-\tau_j^2}}\right]$$

所以

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{2\sum a_j\alpha_j+a\mp\mu}\phi_\alpha(\xi)\phi_\alpha(\xi+\lambda^{\frac{1}{2}}y)=$$

$$\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 s^{\frac{a\mp\mu}{2}-1}\prod_{j=1}^{n}(1-s^{2a_j})^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{4s^{a_j}x_jy_j-(1+s^{2a_j})(x_j^2+y_j^2)}{1-s^{2a_j}}\right]\mathrm{d}s$$

## 4.3　基本解的验证

给定伸缩

$$\delta_\lambda(t,x,y)=(\lambda^2t,\lambda x,\lambda y),\quad \lambda>0$$

称 $H_n$ 上的函数 $f(t,x,y)$ 是关于 $\delta_\lambda$ 为 $m$ 阶齐次的，当且仅当

$$f(\delta_\lambda(t,x,y))=\lambda^m f(t,x,y)$$

**命题 4.1**　若 $f$ 是 $m$ 阶齐次的，且 $f\in C(H_n\setminus\{0\})$，则

$$|f(t,x,y)|\leqslant C|(t,x,y)|^m$$

其中，$|(t,x,y)|=[t^2+(x^2+y^2)^2]^{\frac{1}{4}}$，满足

$$|\delta_\lambda(t,x,y)|=\lambda|(t,x,y)|$$

即 $|\cdot|$ 是一阶齐次的.

**证明**　因为 $f(\lambda^2t,\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(t,x,y)$，所以 $f(t,x,y)=\lambda^{-m}f(\lambda^2t,\lambda x,\lambda y)$. 取 $\lambda=|(t,x,y)|^{-1}$，则

$$f(t,x,y)=|(t,x,y)|^m f(\lambda^2t,\lambda x,\lambda y)=|(t,x,y)|^m f(t',x',y')$$

这里令 $t' = \lambda^2 t, x' = \lambda x, y' = \lambda y$，因为 $|(t',x',y')| = \lambda|(t,x,y)| = 1$，即 $(t',x',y')$ 在 $H_n$ 的一个球面上，这球面是个紧集，所以

$$|f(t,x,y)| \leqslant |f(t',x',y')| \cdot |(t,x,y)|^m \leqslant \sup_{t'^2+(x'^2+y'^2)^2=1} |f(t',x',y')| \cdot |(t,x,y)|^m = C|(t,x,y)|^m$$

证毕.

**命题 4.2** 若 $f$ 是 $m$ 阶齐次的，且 $f \in C(H_n \backslash \{0\})$，则当 $m > -2n-2$ 时，$f$ 是局部可积的.

**证明** 只须在包含原点的紧集内证明结论. 取 $\Omega = \{(t,x,y) \in H_n \mid |(t,x,y)| \leqslant 1\}$，则由命题 4.1

$$\int_\Omega |f(t,x,y)| \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C\int_\Omega |(t,x,y)|^m \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C\int_0^1 r^m \mathrm{d}r \int_{S_r} \mathrm{d}S_r = C \cdot |S_1| \int_0^1 r^{m+2n+1}\mathrm{d}r$$

只须 $m+2n+2>0$ 即可积. 证毕.

现在验证式(4.6)确为基本解. 对于算子

$$\mathcal{L}_\mu = -\sum_{j=1}^n (L_j^2 + M_j^2) + \mathrm{i}\mu T = -\Big[\sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(y_j\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big] + \mathrm{i}\mu\frac{\partial}{\partial t}$$

前面已形式地求出了

$$u = C(n,\mu)\Big(\frac{|x|^2+|y|^2}{4} + \mathrm{i}t\Big)^{-\frac{n-\mu}{2}}\Big(\frac{|x|^2+|y|^2}{4} - \mathrm{i}t\Big)^{-\frac{n+\mu}{2}}$$

其中，$C(n,\mu) = \dfrac{\Gamma\Big(\dfrac{n+\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{n-\mu}{2}\Big)}{2^{n+2}\pi^{n+1}}$，$|\mu| \neq n+2m, m = 0,1,2,\cdots$.

作伸缩 $\delta_\lambda$，得

$$\lambda^{-n+\mu}\lambda^{-n-\mu} = \lambda^{-2n}$$

知 $u$ 是 $-2n$ 次齐次的. 由于 $-2n > -2n-2$，故按命题 4.2 知 $u \in L^1_{\text{loc}}(H_n)$. 特别地，$u$ 是一个广义函数. 进一步有

**命题 4.3**　(1) $u$ 是 $-2n$ 阶齐次的，且 $u \in C^\infty(H_n\backslash\{0\}) \cap L^1_{\text{loc}}(H_n)$；

(2) $\mathcal{L}_\mu u = \delta(t,x,y)$.

**证明**　为证明命题 4.3 中(2)，令

$$u_\varepsilon = C(n,\mu)\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\varepsilon^2+\mathrm{i}t\right)^{\frac{n-\mu}{2}} \cdot$$

$$\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\varepsilon^2-\mathrm{i}t\right)^{\frac{n+\mu}{2}},\quad \varepsilon > 0$$

则 $u_\varepsilon \in C^\infty(H_n)$，且 $u_\varepsilon \to u$ 在 $\mathscr{D}'$，因而

$$\mathcal{L}_\mu u_\varepsilon \to \mathcal{L}_\mu u,\quad 在\ \mathscr{D}'\ 中$$

令 $\mathcal{L}_\mu u_\varepsilon = V_\varepsilon$，只须证明 $V_\varepsilon \to \delta$. 代入具体的 $\mathcal{L}_\mu$，可算得

$$V_\varepsilon = \mathcal{L}_\mu u_\varepsilon = C(n,\mu)\,\frac{n^2-\mu^2}{2^{2n}}\varepsilon^2\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\varepsilon^2+\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n-\mu}{2}-1} \cdot$$

$$\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\varepsilon^2-\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}-1}$$

任取 $\phi \in C_0^\infty(H_n)$，则

$$\int_{H_n} V_\varepsilon\phi\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$C(n,\mu)'\varepsilon^2\int_{H_n}\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\varepsilon^2+\mathrm{i}t\right)^{\frac{n-\mu}{2}-1} \cdot$$

$$\left(\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\varepsilon^2-\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}-1}\phi(t,x,y)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $t=\varepsilon^2 t'$，$x=\varepsilon x'$，$y=\varepsilon y'$，并在下面积分中仍记 $t'$，$x'$，$y'$ 为 $t$，$x$，$y$，则

$$\int_{H_n} V_\varepsilon\phi\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C(n,\mu)'\int_{H_n}\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n-\mu}{2}-1} \cdot$$

$$\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}-1}\phi(\varepsilon^2 t,\varepsilon x,\varepsilon y)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

$$C(n,\mu)'\phi(0,0,0)\int_{H_n}\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n-\mu}{2}-1}\cdot$$

$$\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

要算上式中的积分，其值应恰为 $C(n,\mu)'^{-1}$. 事实上，

$$I=\int_{H_n}\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}+\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n-\mu}{2}-1}\cdot$$

$$\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}-\mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}}\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\right)^{-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\mathrm{i}t')^{-\frac{n+\mu}{2}-1}(1+\mathrm{i}t')^{-\frac{n-\mu}{2}-1}\mathrm{d}t'$$

这里 $t'=\dfrac{t}{1+\dfrac{|x|^2+|y|^2}{4}}$. 为记号方便，仍记 $t'$ 为 $t$. 利用

$$(1+\mathrm{i}t)^{-\gamma}=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^{\gamma-1}\mathrm{d}\tau=\hat{f},\quad \gamma=\frac{n+\mu}{2}+1$$

$$(1-\mathrm{i}t)^{-\beta}=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}\mathrm{e}^{-|\tau|}|\tau|^{\beta-1}\mathrm{d}\tau=\hat{g},\quad \beta=\frac{n-\mu}{2}+1$$

这里

$$f(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^{\gamma-1}, & \tau>0\\ 0, & \tau<0\end{cases}$$

$$g(\tau)=\begin{cases}0, & \tau>0\\ \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\mathrm{e}^{-|\tau|}|\tau|^{\beta-1}, & \tau<0\end{cases}$$

且 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^{2n}}\left(1+\frac{|x|^2+|y|^2}{4}\right)^{-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2^{2n}\frac{\pi^n}{\Gamma(n+1)}$（这里令 $x=$

$\tau\cos\theta, y = \tau\sin\theta$)，有

$$I = 2^{2n}\ \frac{\pi^n}{\Gamma(n+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}\hat{g}\,\mathrm{d}t =$$

$$2^{2n}\ \frac{\pi^n}{\Gamma(n+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)(t)\ \overline{\hat{g}(-x)(t)}\,\mathrm{d}t =$$

$$2^{2n}\ \frac{\pi^n}{\Gamma(n+1)}2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(-x)\,\mathrm{d}x =$$

$$2^{2n+1}\ \frac{\pi^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\tau}\tau^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\ \frac{\tau^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\tau}}{\Gamma(\beta)}\mathrm{d}\tau =$$

$$2^{2n+1}\ \frac{\pi^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\ \frac{1}{\left(\Gamma(\frac{n+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}+1\right)}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\tau}\tau^n\,\mathrm{d}\tau$$

由伽马函数 $\Gamma(r) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{r-1}\mathrm{d}x$ 得

$$I = \frac{\pi^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}+1\right)}\ \frac{2^{2n+1}}{2^{n+1}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{n+1-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$2^n\ \frac{\pi^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}+1\right)} =$$

$$2^n\ \frac{\pi^{n+1}}{\frac{n+\mu}{2}\cdot\frac{n-\mu}{2}\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)} = C(n,\mu)'^{-1}$$

证毕.

## 4.4　亚椭圆性与局部可解性

**引理 4.1**　设 $w = (t,x,y) \in H_n$，令 $\| w \| = (t^2 + |x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}$，$|w|_{H_n} = [t^2 + (|x|^2 + |y|^2)^2]^{\frac{1}{4}}$，则当 $\| w \| \leqslant 1$ 时，

$$C_2 \| w \| \leqslant |w|_{H_n} \leqslant C_1 \| w \|^{\frac{1}{2}}$$

当 $\| w \| \geqslant 1$ 时，

$$C'_2 \| w \|^{\frac{1}{2}} \leqslant | w |_{H_n} \leqslant C'_1 \| w \|$$

**证明** 因为

$$| w |_{H_n} = (t^2 + (| x |^2 + | y |^2)^2)^{\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$[\| w \|^2 + \| w \|^4]^{\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$2^{\frac{1}{4}} \begin{cases} \| w \|^{\frac{1}{2}}, & \| w \| \leqslant 1 \\ \| w \|, & \| w \| \geqslant 1 \end{cases}$$

令 $M = \max\{| t |, (| x |^2 + | y |^2)^{\frac{1}{2}}\}$

$$\| w \| = (t^2 + | x |^2 + | y |^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$2^{\frac{1}{2}} M \leqslant 2^{\frac{1}{2}} \begin{cases} | w |_{H_n}^2, & M = | t | \\ | w |_{H_n}, & M = (| x |^2 + | y |^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

因此,当 $\| w \| \leqslant 1$ 时,$| w |_{H_n} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}} \| w \|$;当 $\| w \| \geqslant 1$ 时,$| w |_{H_n} \geqslant 2^{\frac{1}{2}} \| w \|^{\frac{1}{2}}$.证毕.

**引理 4.2** 设

$$u_\mu(w) = u_\mu(t, x, y) =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)}{2(2\pi)^{n+1}} \left(\frac{| x |^2 + | y |^2}{4} - \mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}} \cdot$$

$$\left(\frac{| x |^2 + | y |^2}{4} + \mathrm{i}t\right)^{-\frac{n-\mu}{2}}$$

其中 $| \mu | \neq n + 2m (m = 0, 1, 2, \cdots)$,则 $u_\mu \in \mathscr{S}'(H_n)$.

**证明** 已证 $u_\mu$ 是 $-2n$ 阶齐次的,且 $u_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}$,于是

$$| u_\mu | \leqslant C | w |_{H_n}^{-2n} \leqslant C' \| w \|^{-n}, (\text{当 } \| w \| > 1)$$

对任意 $\phi \in C_0^\infty$,令 $u_\mu = \phi u_\mu + (1 - \phi) u_\mu \in \mathscr{S}'$,由 $\phi u_\mu \in \mathscr{E}' \subset \mathscr{S}'$,$(1 - \phi) u_\mu \in \mathscr{S}'$,知 $u_\mu \in \mathscr{S}'$.证毕.

**引理 4.3** 令 $E_\mu$ 为 $E_\mu f = f * u_\mu$,则 $E_\mu : \mathscr{S} \to C^\infty$ 及 $E_\mu : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$,且 $\mathscr{L}_\mu E_\mu = E_\mu \mathscr{L}_\mu = I$.

**证明** $\forall f \in \mathscr{S}$,

$$\mathcal{L}_\mu E_\mu f = \mathcal{L}_\mu(f * u_\mu) = f * \mathcal{L}_\mu u_\mu = f * \delta = f$$

此式对 $f \in \mathscr{E}'$ 也成立，因此

$$\mathcal{L}_\mu E_\mu = I$$

同理

$$\mathcal{L}_{\bar{\mu}} E_{\bar{\mu}} = I, (E_{\bar{\mu}})^* (\mathcal{L}_{\bar{\mu}})^* = (\mathcal{L}_{\bar{\mu}} E_{\bar{\mu}})^* = I$$

易知 $(\mathcal{L}_\mu)^* = \mathcal{L}_{\bar{\mu}}, (E_\mu)^* = E_{\bar{\mu}}$，故 $E_\mu \mathcal{L}_\mu = (E_{\bar{\mu}})^* (\mathcal{L}_{\bar{\mu}})^* = I$. 证毕.

本引理的结论表明 $\mathcal{L}_\mu$ 有左逆和右逆.

**定义 4.2** 设 $\Omega$ 是 $H_n$ 中之开集，称 $\mathcal{L}_\mu$ 在 $\Omega$ 中是局部可解的，若对 $\forall w_0 \in \Omega$，$\exists w_0$ 的邻域 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得对 $\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega_0)$，$\exists u \in \mathscr{D}(\Omega_0)$，满足

$$\mathcal{L}_\mu u = f, \quad (\text{在 } \Omega_0 \text{ 中})$$

**定理 4.1** 当 $|\mu| \neq n + 2m (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 时，在 $H_n$ 上（或在 $H_n$ 的任一开集上）$\mathcal{L}_\mu$ 是局部可解的.

**证明** $\forall w_0 \in H_n$，取 $\Omega_0 \subset H_n$ 为含 $w_0$ 的一个有界开集，设 $f \in \mathscr{D}'(\Omega_0)$，取 $\phi \in C_0^\infty$，$\phi$ 在 $\Omega_0$ 的某一个邻域 $\Omega'_0$ 上为 1，令 $f_1 = \phi f$，则 $f_1 \in \mathscr{E}'$. 令 $u = E_\mu(f_1) = f_1 * u_\mu$，则

$$\mathcal{L}_\mu u = \mathcal{L}_\mu E_\mu(f_1) = f_1, \quad \text{在 } \Omega'_0 \text{ 上}$$

特别地，在 $\Omega_0$ 上 $\mathcal{L}_\mu u = f$. 证毕.

**定义 4.3** 称 $\mathcal{L}_\mu$ 在 $\Omega$ 中是亚椭圆的，若 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$\mathcal{L}_\mu u \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.

**定理 4.2** 若 $|\mu| \neq n + 2m (m = 0, 1, 2, \cdots)$，则 $\mathcal{L}_\mu$ 是 $H_n$ 中任一开集 $\Omega$ 上的亚椭圆算子.

**证明** 设 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$\mathcal{L}_\mu u \in C^\infty(\Omega)$，要证 $u \in C^\infty(\Omega)$，只须证明在任何开集 $\Omega_0 \subset \Omega$ 中，$u \in C^\infty(\Omega)$.

设 $\mathcal{L}_\mu u = f, f \in C^\infty(\Omega)$，令 $f = \phi f + (1 - \phi) f = f_1 + f_2$，$\phi \in C_0^\infty$ 且 $\phi$ 在 $\Omega_1$ 上为 1，$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$，则 $f_1 \in C_0^\infty$. 令 $u_1 = E_\mu f_1$，从 $E_\mu : \mathscr{S} \to C^\infty$，故 $u_1 \in C^\infty$，令 $u_2 = u - u_1$，则 $\mathcal{L}_\mu u_2 = f - f_1 =$

$f_2$. 取 $\psi \in C_0^\infty$，$\psi$ 在 $\Omega_1$ 上恒为 1，则由 $\psi u_2$ 为 $\mathscr{E}'$ 中广义函数，故

$$\mathcal{L}_\mu(\psi u_2) = \tilde{f}_2 \in \mathscr{E}' \tag{4.7}$$

用 $E_\mu$ 来作用

$$E_\mu \mathcal{L}_\mu(\psi u_2) = E_\mu \tilde{f}_2$$

故

$$\psi u_2(w) = E_\mu \mathcal{L}_\mu(\psi u_2) = E_\mu \tilde{f}_2 = \tilde{f}_2 * u_\mu = \int \tilde{f}_2(w') u_\mu(w'^{-1}w)\mathrm{d}w'$$

当 $w \in \Omega_0$ 时，

$$u_2(w) = \int \tilde{f}_2(w') u_\mu(w'^{-1}w)\mathrm{d}w'$$

由 $w \in \Omega_0$，$w' \in \Omega$，故 $w'^{-1}w \neq 0$，故 $u_\mu(w'^{-1}w) \in C^\infty$. 从式(4.7)，在 $\Omega_1$ 上

$$\mathcal{L}_\mu u_2 = \tilde{f}_2 = f_2 = (1-\phi)f = 0$$

故 $u_2(w) \in C^\infty$，因此 $u \in C^\infty(\Omega_0)$. 证毕.

下面介绍定理.

**定理 4.3(Helffer, Nourrigat, Beals 定理)** 设 $L_m$ 是分层幂零 Lie 群 $G$ 上的左不变 $m$ 次齐性微分算子，则 $L_m$ 是亚椭圆的 $\Leftrightarrow$ 对 $G$ 的所有非平凡不可约表示 $\pi$，$\pi(L_m)$ 是 $C_\pi^\infty = \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的内射.

利用此定理，验证 $\pi_{\pm\lambda}(\mathcal{L}_u)$，$\pi_{(y,\eta)}(\mathcal{L}_\mu)$ 是内射，也可证明 $\mathcal{L}_\mu$ 的亚椭圆性.

下面研究 $\mathcal{L}_n$ 的部分逆.

**定义 4.4** 若存在卷积算子 $Q_n$，$P_n$ 满足：

$$Q_n \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n Q_n = I - P_n$$

且 $P_n$ 具有性质：

(1) $P_n^2 = P_n$

(2) $P_n \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n P_n = 0$

则称 $Q_n$ 为 $\mathcal{L}_n$ 的部分逆($P_n$ 称为 Cauchy-Szegö 核).

对 $\mathcal{L}_n Q_n f = f - P_n f$，若 $f$ 正交于 $\mathcal{L}_n$ 的零空间 $\{u: \mathcal{L}_n u = 0\}$，则 $P_n f = 0$，于是 $Q_n f$ 为 $\mathcal{L}_n u = f$ 的解.

当 $|\mu| \neq n + 2m(m = 0,1,2,\cdots)$ 时，$\mathcal{L}_n$ 只有零解，故 $P_n = 0$. 令 $Q_n f = f * q_n$，称 $q_n$ 为 $\mathcal{L}_n$ 的相对基本解.

**定理 4.4**　$\mathcal{L}_n$ 的部分逆存在.

**证明**　设 $0 < |\mu - n| < \delta$，$\delta$ 任意小. 当 $\mu \to n$ 时，

$$\frac{n-\mu}{2}\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}+1\right) \to \Gamma(1) = 1$$

因此 $\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right) \sim \frac{2}{n-\mu}$. 令 $E_\mu: E_\mu f = f * u_\mu$，知 $E_\mu = \frac{Q_n}{\mu - n} + J_n + O(n-\mu)$，其中 $J_n$ 为某个卷积算子. 而 $\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_n + (\mu - n)\mathrm{i}T$. 因为 $E_\mu \mathcal{L}_\mu = I$，所以

$$\frac{Q_n \mathcal{L}_n}{\mu - n} + (\mu - n) J_n \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + J_n \mathcal{L}_n + \mathrm{i}Q_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = I + O(\mu - n)$$

令 $\mu \to n$，得

$$Q_n \mathcal{L}_n = 0, \quad J_n \mathcal{L}_n = I - Q_n\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial T}\right) \tag{4.8}$$

同理，从 $\mathcal{L}_\mu E_\mu = I$，得

$$\mathcal{L}_n Q_n = 0, \quad \mathcal{L}_n J_n = I - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} Q_n \tag{4.9}$$

从式(4.9)，$Q_n \mathcal{L}_n J_n = Q_n - Q_n\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) Q_n$，得

$$Q_n = Q_n(\mathrm{i}T)Q_n$$
$$\mathrm{i}TQ_n = (\mathrm{i}TQ_n)(\mathrm{i}TQ_n) = (\mathrm{i}TQ_n)^2$$

令 $P_n = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} Q_n$，得

$$P_n^2 = P_n$$
$$\mathcal{L}_n P_n = \mathcal{L}_n(\mathrm{i}T)Q_n = \mathrm{i}T(\mathcal{L}_n Q_n) = 0$$
$$P_n \mathcal{L}_n = 0$$

从式(4.8) 和式(4.9) 得

$$J_n\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_nJ_n = I - P_n$$

现在讨论 $J_n, Q_n$ 的确定：

由 $E_\mu = \dfrac{Q_n}{\mu - n} + J_n + O(\mu - n)$，知

$$Q_n = \lim_{\mu \to n}(\mu - n)E_\mu$$

设 $Q_nf = f * q_n$，则

$$q_n = \lim_{\mu \to n}(\mu - n)u_\mu =$$

$$\lim_{\mu \to n}(\mu - n)\frac{\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\mu}{2}\right)}{2(2\pi)^{n+1}}\left(\frac{|x|^2 + |y|^2}{4} - \mathrm{i}t\right)^{-\frac{n+\mu}{2}} \cdot$$

$$\left(\frac{|x|^2 + |y|^2}{4} + \mathrm{i}t\right)^{\frac{n-\mu}{2}} =$$

$$\frac{\Gamma(n)}{(2\pi)^{n+1}}\left(\frac{|x|^2 + |y|^2}{4} - \mathrm{i}t\right)^{-n}$$

而

$$J_n = \lim_{\mu \to n}\left(E_\mu - \frac{Q_n}{\mu - n}\right) =$$

$$\lim_{\mu \to n}\frac{(\mu - n)E_\mu - Q_n}{\mu - n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}[(\mu - n)E_\mu]\Big|_{\mu = n}$$

设 $P_nf = f * p_n$，则

$$p_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}[(\mu - n)E_\mu]\,|_{\mu = n} =$$

$$\frac{(n-1)!}{2(2\pi)^{n+1}}\left(\frac{|x|^2 + |y|^2}{4} - \mathrm{i}t\right)^{-n}\ln\frac{\frac{|x|^2 + |y|^2}{4} - \mathrm{i}t}{\frac{|x|^2 + |y|^2}{4} + \mathrm{i}t}$$

证毕.

# 第五章　Kohn-Laplace 算子的特征值与谱

在欧氏空间及 Riemann 流形中，对 Laplace 算子的特征值和谱进行了大量的研究，见参考文献[10,13,31,46]. 关于二步幂零 Lie 群上 Laplace 算子的谱，见参考文献[22]. 本章研究 Heisenberg 群 $H_n$ 上 Kohn-Laplace 算子 $\mathcal{L}_\mu(\mu \in \mathbf{C})$（见参考文献[20]）在有界开集 $\Omega \subset H_n$ 上的特征值问题. 设 $\Omega$ 的边界是分片光滑的，$\mathcal{L}_\mu(\mu \in (-n,n))$ 的边值问题，已由参考文献 [31] 作过研究.

5.1 节将证明，当 $|\mathrm{Re}\mu| < n$ 时，算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的特征值存在且是可列的[40,42]；当 $\mu \in (-n,n)$ 时，所有特征值都是正的. 5.2 节给出了相邻特征值差的估计[42,45]. 5.3 节研究 Kohn-Laplace 算子的谱[41].

## 5.1　特征值的存在性与离散性

令空间

$$V = \{u \in L^2(\Omega); L_j u, M_j u \in L^2(\Omega), j = 1, \cdots, n\}$$

具有内积

$$(u,v)_V = (u,v)_{L^2} + \sum_{j=1}^{n} [(L_j u, L_j v)_{L^2} + (M_j u, M_j v)_{L_2}] \tag{5.1}$$

易证 V 是一个 Hilbert 空间，与此内积相应的范数为

$$\| u \|_V^2 = \sum_{j=1}^{n} (\| L_j u \|_{L^2}^2 + \| M_j u \|_{L^2}^2) + \| u \|_{L^2}^2 \tag{5.2}$$

以 $V_0$ 记 $C_0^\infty(\Omega)$ 按上述范数的完备化.

在 $V \times V$ 上引进拟双线性型

$$a_\mu(u,v) = \int_\Omega \left[ -\sum_{j=1}^{n} (L_j^2 + M_j^2) u\bar{v} + \mathrm{i}\mu Tu \cdot \bar{v} + \mu u\bar{v} \right] \mathrm{d}w, \quad \forall u,v \in V \tag{5.3}$$

这里 $\mathrm{d}w = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$，$\mu$ 为某个正数.

**引理 5.1** $a_\mu(u,v)$ 在 $V \times V$ 上有界，即存在 $c > 0$，$c$ 与 $\mu$ 有关，使得

$$|a_\mu(u,v)| \leqslant c \|u\|_V \|v\|_V \tag{5.4}$$

**证明** 由 Heisenberg 关系中 $[L_j, M_j] = -T$，有

$$\begin{aligned}
&\left| \mathrm{i}\mu \int_\Omega Tu \cdot \bar{v} \mathrm{d}w \right| \leqslant \\
&\quad c\left[ \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega (|L_j u|^2 + |M_j u|^2) \mathrm{d}w \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&\quad \left[ \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega (|L_j v|^2 + |M_j v|^2) \mathrm{d}w \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\quad c \|u\|_V \|v\|_V
\end{aligned}$$

从不等式

$$\begin{aligned}
|a_\mu(u,v)| \leqslant & \left| \int_\Omega \left[ -\sum_{j=1}^{n} (L_j^2 + M_j^2) u\bar{v} + \mu u\bar{v} \right] \mathrm{d}w \right| + \\
& \left| \mathrm{i}\mu \int_\Omega Tu\bar{v} \mathrm{d}w \right|
\end{aligned}$$

可知所需不等式成立. 证毕.

**引理 5.2** 当 $-n < \mathrm{Re}\mu < n$ 时，存在常数 $c > 0$（$c$ 可与 $\mu$ 有关），使

$$|a_\mu(u,u)| \geqslant c \|u\|_{\frac{2}{2}}^{2}, u \in V_0 \tag{5.5}$$

**证明** 对每个 $j, j = 1, \cdots, n$，有

$$(Tu, u) = \int_\Omega (M_j L_j u - L_j M_j u) \bar{u} \mathrm{d}w = -2\mathrm{i} \int_\Omega \mathrm{Im}(L_j u M_j \bar{u}) \mathrm{d}w$$

(5.6)

成立,因而

$$\mathrm{Re}[\mathrm{i}\mu(Tu,u)] = \frac{2\mathrm{Re}\mu}{n}\int_{\Omega}\mathrm{Im}(L_j u M_j \bar{u})\mathrm{d}w$$

所以

$$\begin{aligned}|(\mathcal{L}_\mu u,u)| &\geqslant \\ &\left|(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2 u + M_j^2 u),u) + \frac{2\mathrm{Re}\mu}{n}\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n}(L_j u, M_j u)\right| \geqslant \\ &\left(1-\frac{|\mathrm{Re}\mu|}{n}\right)(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2 + M_j^2)u,u)\end{aligned} \tag{5.7}$$

这里用到了 $L_j^t = -L_j$, $M_j^t = -M_j$ 及

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(L_j u, M_j u)\right| \leqslant \frac{1}{2}(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2 + M_j^2)u,u)$$

利用 Kohn 不等式(见参考文献[33])知,存在常数 $c>0$,使

$$(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2 + M_j^2)u,u) \geqslant \|u\|_{\frac{1}{2}}^2$$

就得到结论. 证毕.

从引理 5.2 可看出,$V_0 \subset H_0^{\frac{1}{2}}$(Sobolev 空间),因此 $H^{-\frac{1}{2}}$($H_0^{\frac{1}{2}}$ 的对偶空间)$\subset V'$($V_0$ 的对偶空间).

**定理 5.1** 当 $|\mathrm{Re}\mu|<n$ 时,算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的特征值或为有限个,或为可列个. 当特征值为可列个时它们按绝对值排成一列

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_m| \leqslant \cdots, \qquad |\lambda_m| \to \infty (m\to\infty)$$

**证明** 从式(5.5)知,$\alpha I + \mathcal{L}_\mu$ 确定了一个从 $V_0$ 到 $V'$ 上的同构. 以 $G(\alpha)$ 记从 $V'$ 到 $V_0$ 的逆同构,$I$ 记从 $V_0$ 到 $H_0^{\frac{1}{2}}$ 中的嵌入,$J$ 记从 $H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ 到 $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$ 中的自然内射,$I'$ 记从 $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$ 到 $V'$ 中的嵌入,则易知 $J$ 是紧的(见参考文献[11]). 利用紧算子的谱性质,通过标准的论证便得到结论. 证毕.

**注 5.1** 当 $\mu$ 为复数时,特征值可以是复的,此时 $\mathcal{L}_\mu$ 将不是

自伴的.

**引理 5.3** 当 $\mu \in (-n,n)$ 时,0 不是 $\mathcal{L}_\mu$ 的特征值.

**证明** 假设 0 是特征值,$u \in V_0$ 为相应的特征函数,则

$$-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2+M_j^2)u+\mathrm{i}\mu Tu=0$$

于是有

$$-\mathrm{i}\mu(Tu,u)=\left(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2+M_j^2)u,u\right) \tag{5.8}$$

当 $\sum_{j=1}^{n}(\|L_ju\|^2+\|M_ju\|^2)\neq 0$ 时,由式(5.6)知

$$|\mathrm{i}\mu(Tu,u)|\leqslant\frac{|\mu|}{n}\left(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2+M_j^2)u,u\right)<\left(-\sum_{j=1}^{n}(L_j^2+M_j^2)u,u\right)$$

它使式(5.8)不可能成立.当 $\sum_{j=1}^{n}(\|L_ju\|^2+\|M_ju\|^2)=0$ 时,由参考文献[9]的嵌入不等式

$$\frac{1}{|B_R|}\left(\int_{B_R}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant cR\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\sum_{j=1}^{n}(|L_ju|^2+|M_ju|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $B_R$ 为向量场 $\{L_j,M_j\}$ 诱导出来的半径为 $R$ 的广义"球",故 $u\doteq 0$.这导致矛盾.证毕.

**定理 5.2** 当 $\mu \in (-n,n)$ 时,$\mathcal{L}_\mu$ 的特征值全在正实轴上,且可排成(按特征值重数)

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m\leqslant\cdots,\quad \lambda_m\to\infty(m\to\infty)$$

**证明** 从引理 5.2 的证明可看出,$\forall u\in V_0$,

$$(\mathcal{L}_\mu u,u)\geqslant\left(1-\frac{|\mu|}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}[(L_ju,L_ju)+(M_ju,M_ju)]\geqslant 0 \tag{5.9}$$

即 $\mathcal{L}_\mu$ 为正算子,利用正紧算子性质结合引理 5.3,结论得证.

## 5.2 相邻特征值的估计

本节研究特征值问题,即

$$\begin{cases}\mathcal{L}_\mu u = \lambda u, & 在\,\Omega\,中,\mu \in (-n,n)\\ u\,|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \tag{5.10}$$

的特征值估计. 这里 $\Omega$ 为具光滑边界的有界域,设其特征值为

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots, \quad \lambda_m \to \infty (m \to \infty)$$

相应的规范正交基为 $\{\psi_i\}$.

**定理 5.3** 对 $m \geqslant 1$,

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m \leqslant \frac{2}{m(n-|\mu|)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \tag{5.11}$$

成立.

**证明** 作试验函数

$$u_{1i} = x_1\psi_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\psi_k, \quad i = 1,\cdots,m \tag{5.12}$$

其中,$a_{ik} = \int_\Omega x_1\psi_i\psi_k \mathrm{d}w, i,k = 1,\cdots,m$. 易证 $u_{1i}$ 与 $\psi_1,\cdots,\psi_m$ 正交. 不难证明经典的 Rayleigh 定理在这里仍然成立,从而

$$\lambda_{m+1} \leqslant \frac{(\mathcal{L}_\mu u_{1i}, u_{1i})}{(u_{1i}, u_{1i})}, \quad \forall\, i \tag{5.13}$$

由式(5.12),得

$$(u_{1i}, u_{1i}) = \int_\Omega u_{1i}\Big(x_1\psi_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\psi_k\Big)\mathrm{d}w = \int x_1\psi_i u_{1i}\mathrm{d}w$$

现在来计算式(5.13) 中的分子. 首先,由直接计算,可得

$$\mathcal{L}_\mu(x_1\psi_i) = -2L_1\psi_i + x_1\,\mathcal{L}_\mu\psi_1 \tag{5.14}$$

其次,由式(5.14) 及 $u_{1i}$ 与 $\psi_i$ 的正交性,可得

$$(\mathcal{L}_\mu u_{1i}, u_{1i}) = -2\int u_{1i}L_1\psi\mathrm{d}w + \lambda_i\int u_{1i}^2\mathrm{d}w \tag{5.15}$$

由式(5.15)、式(5.13)可得

$$\lambda_{m+1} \leqslant \frac{\left[-2\int u_{1i}L_1\psi_i\mathrm{d}w + \lambda_i\int u_{1i}^2\mathrm{d}w\right]}{\int u_{1i}^2\mathrm{d}w}$$

即

$$\lambda_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\int u_{1i}^2\mathrm{d}w \leqslant -2\sum_{i=1}^{m}\int u_{1i}L_1\psi_i\mathrm{d}w + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int u_{1i}^2\mathrm{d}w$$

与式(5.12)类似,可定义 $u_{ji} = x_j\psi_i - \sum_{k=1}^{m}a_{ik}\psi_k$, $j = 2,\cdots,n$,这时 $a_{ik} = \int x_j\psi_i\psi_k\mathrm{d}w$. 重复前述推导,并对 $j(j = 1,\cdots,n)$ 作和,有

$$\lambda_{m+1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\int u_{ji}^2\mathrm{d}w \leqslant -2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\int u_{ji}L_j\psi_i\mathrm{d}w + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int u_{ji}^2\mathrm{d}w \tag{5.16}$$

类似地,定义 $v_{ji} = y_j\psi_i - \sum_{k=1}^{m}a_{ik}\psi_k$, $j = 1,\cdots,n$,这时 $a_{ik} = \int y_j\psi_i\psi_k$,对不同的 $j$,仍可推得

$$\lambda_{m+1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\int v_{ji}^2\mathrm{d}w \leqslant -2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\int v_{ji}M_j\psi_i\mathrm{d}w + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int v_{ji}^2\mathrm{d}w \tag{5.17}$$

将式(5.16)、式(5.17)加起来,有$(j = 1,\cdots,n, i = 1,\cdots,m)$

$$\lambda_{m+1}\sum_{j,i}\int(u_{ji}^2 + v_{ji}^2)\mathrm{d}w \leqslant$$
$$-2\sum_{j,i}\int(u_{ji}L_j\psi_i + v_{ji}M_j\psi_i)\mathrm{d}w + \sum_{j,i}\lambda_i\int(u_{ji}^2 + v_{ji}^2)\mathrm{d}w \tag{5.18}$$

下面证明

$$\sum_{j,i}\int(u_{ji}L_j\psi_i + v_{ji}M_j\psi_i)\mathrm{d}w = -nm \tag{5.19}$$

注意到

$$\sum_i \int u_{1i} L_1 \psi_i \mathrm{d}w = \sum_i \int x_1 \psi_i L_1 \psi_i \mathrm{d}w - \sum_{i,k} a_{ik} \int \psi_k L_1 \psi_i \mathrm{d}w$$

利用 $a_{ik} = a_{ki}$ 及 $L_j^t = -L_j$，可得

$$\sum_{i,k} a_{ik} \int \psi_k L_1 \psi_i \mathrm{d}w = -\sum_{i,k} a_{ik} \int \psi_k L_1 \psi_i \mathrm{d}w$$

以及

$$\sum_i \int u_{1i} L_1 \psi_i \mathrm{d}w = \sum_i \int x_1 \psi_i L_1 \psi_i \mathrm{d}w =$$

$$-\sum_i \int \psi_i L_1 (x_1 \psi_i) \mathrm{d}w =$$

$$-\sum_i \int \psi_i^2 \mathrm{d}w - \sum_i \int x_1 \psi_i L_1 \psi_i \mathrm{d}w$$

因而有

$$\sum_i \int u_{1i} L_1 \psi_i \mathrm{d}w = -\frac{m}{2}$$

一般地，有

$$\sum_{j,i} \int u_{ji} L_j \psi_i \mathrm{d}w = -\frac{nm}{2},\ \sum_{j,i} \int v_{ji} M_j \psi_i \mathrm{d}w = -\frac{nm}{2}$$

故式(5.19)成立.

将式(5.18)中的 $\lambda_i$ 换成 $\lambda_m$，得到

$$(\lambda_{m+1} - \lambda_m) \sum_{j,i} \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w \leqslant 2nm \tag{5.20}$$

将式(5.19)利用 Cauchy 不等式

$$nm \leqslant \left[ \sum_{j,i} \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{i=1}^m (\mathcal{L}\psi_i, \psi_i) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.21}$$

这里 $\mathcal{L}$ 即 $\mathcal{L}_0$（$\mu$ 取为 0），回忆强制不等式(5.9)，有

$$\lambda_i = (\mathcal{L}_\mu \psi_i, \psi_i) \geqslant \left(1 - \frac{|\mu|}{n}\right)(\mathcal{L}\psi_i, \psi_i) = \frac{n - |\mu|}{n}(\mathcal{L}\psi_i, \psi_i)$$

即有

$$\left( \sum_{j,i} \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w \right)^{-1} \leqslant \frac{1}{n^2 m^2} \sum_{i=1}^m (\mathcal{L}\psi_i, \psi_i) \leqslant$$

$$\frac{1}{n \cdot m^2} \frac{1}{n-|\mu|} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

代入式(5.20)，最终得到式(5.11). 证毕.

**定理 5.4** 对 $m \geqslant 1$，有隐式估计

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_{m+1}-\lambda_i} \geqslant \frac{m}{2}(n-|\mu|) \tag{5.22}$$

及显式估计

$$\lambda_{m+1}-\lambda_m \leqslant \frac{2}{m(n-|\mu|)} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_m} \tag{5.23}$$

**证明** 记

$$J = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \int (u_{ji} L_j \psi_i + v_{ji} M_j \psi_i) \mathrm{d}w$$

并在式(5.18)中引进一个新的参数 $\beta, \beta > \lambda_m$，则式(5.18)可写成

$$\lambda_{m+1} \sum_{j,i} \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w \leqslant$$

$$\sum_{j,i} (\lambda_i - \beta) \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w + \beta \sum_{j,i} \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w + 2J \tag{5.24}$$

由式(5.19)知 $J = nm$，此外利用 Cauchy 不等式知，$\forall \delta > 0$，

$$\int |u_{ji} L_j \psi_i| \mathrm{d}w \leqslant$$

$$\frac{\delta}{2}(\beta - \lambda_i) \int u_{ji}^2 \mathrm{d}w + \frac{1}{2\delta}(\beta - \lambda_i)^{-1} \int |L_j \psi_i|^2 \mathrm{d}w, \quad \forall j, i$$

对积分 $\int v_{ji} M_j \psi_i \mathrm{d}w$ 也有类似的不等式成立，于是

$$2J = 2nm \leqslant$$

$$\delta \sum_{j,i} (\beta - \lambda_i) \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w + \delta^{-1} \sum_{j,i} (\beta - \lambda_i)^{-1} \cdot$$

$$\int (|L_j \psi_i|^2 + |M_j \psi_i|^2) \mathrm{d}w \tag{5.25}$$

记 $S_1 = \sum_{j,i} \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w, S_2 = \sum_{j,i} (\beta - \lambda_i) \int (u_{ji}^2 + v_{ji}^2) \mathrm{d}w$，于是从

式(5.24)有

$$(\lambda_{m+1}-\beta)S_1+S_2\leqslant 2J=2nm \tag{5.26}$$

以及从式(5.25)有

$$2nm\leqslant \delta S_2+\delta^{-1}\sum_{j,i}(\beta-\lambda_i)^{-1}\int(|L_j\psi_i|^2+|M_j\psi_i|^2)\mathrm{d}w \tag{5.27}$$

因为

$$\sum_{j=1}^{n}\int(|L_j\psi_i|^2+|M_j\psi_i|^2)\mathrm{d}w=(\mathcal{L}\psi_i,\psi_i)\leqslant$$

$$\frac{n}{n-|\mu|}(\mathcal{L}_\mu\psi_i,\psi_i)\leqslant\frac{n}{n-|\mu|}\sqrt{\lambda_i}$$

所以式(5.27)变为

$$2mn\leqslant\delta S_2+\delta^{-1}\frac{n}{n-|\mu|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\beta-\lambda_i} \tag{5.28}$$

现在要使式(5.28)不等号右边的值最小，可取 $\delta=S_2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n-|\mu|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\beta-\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}$. 代入式(5.28)，可得到

$$S_2\geqslant m^2n^2\left(\frac{n}{n-|\mu|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\beta-\lambda_i}\right)^{-1}$$

将它代入式(5.26)，就有

$$(\lambda_{m+1}-\beta)S_1\leqslant 2mn-m^2n^2\left(\frac{n}{n-|\mu|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\beta-\lambda_i}\right)^{-1}$$

选择 $\beta$ 使上式不等号右边的值为零，则有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\beta-\lambda_i}=\frac{m}{2}(n-|\mu|)$$

可知，当取 $\beta=\lambda_{m+1}$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_{m+1}-\lambda_i}\geqslant\frac{m}{2}(n-|\mu|)$$

利用 $(\lambda_{m+1}-\lambda_i)^{-1}\leqslant(\lambda_{m+1}-\lambda_m)^{-1}$，就得到式(5.23). 证毕.

# 5.3 Kohn-Laplace 算子的谱

在本节,对任意的 $\mu \in \mathbf{C}$,将对算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的谱给出精确而详尽的描述. 为了精确地叙述结果,引进下列记号,令

$V_0$ 表示空间 $C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n+1})$ 在范数

$$\|\varphi\|_{V_0} = \left[\|\varphi\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{n} \|L_j\varphi\|_{L^2}^2 + \|M_j\varphi\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

下的完备化,其中 $L_j, M_j, j = 1,2,\cdots,n$,如前所述,有

$$D(\mathcal{L}_\mu) = \{u : u \in V_0, \mathcal{L}_\mu u \in L^2(\mathbf{R}^{2n+1})\}$$

这儿的 $\mathcal{L}_\mu u \in L^2$ 应在分布的意义下理解.

从现在开始,总认为算子 $\mathcal{L}_\mu$ 为无界算子,且定义域为以上所定义的 $D(\mathcal{L}_\mu)$. 令

$l_m^\pm(\mu) = \{z; z \in \mathbf{C}, z = \tau(2m + n \pm \mu), \tau \geqslant 0\}, \quad m = 0,1,2,\cdots$

记 $l_0$ 为非负实数集,则当 $2m + n \pm \mu \neq 0$ 时,$l_m^\pm(\mu)$ 为复平面上的一条射线,其起点为 $z = 0$,方向与向量场 $\dfrac{2m + n \pm \mu}{|2m + n \pm \mu|}$ 中的一个重合,当 $\mp\mu = 2m + n$ 时,$l_m^\pm(\mu)$ 为点 $z = 0$. 令

$$S(\mu) = l_0 \bigcup\nolimits_{m \in I_+} l_m^+(\mu) \bigcup\nolimits_{m \in I_+} l_m^-(\mu) \tag{5.29}$$

下面将证明 $\mathcal{L}_\mu$ 为自伴算子当且仅当 $\mu \in \mathbf{R}$,这也解释了为什么当 $\sigma \notin \mathbf{R}$ 时,谱 $\sigma(\mathcal{L}_\mu)$ 比 $\mu \in \mathbf{R}$ 时的谱复杂的原因.

定理的证明以群 Fourier 变换为基础. 这种方法曾被成功地用于讨论某些幂零 Lie 群上的 Laplace 算子的谱问题(见参考文献[20]).

### 5.3.1 算子 $L_\mu$ 在 $L^2$ 上的一些性质

**命题 5.1** 设 $\mathcal{L}_\mu^*$ 是 $\mathcal{L}_\mu$ 的自伴算子,则 $\mathcal{L}_\mu^* = \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$,

**证明** 首先,可证对 $u \in D(\mathcal{L}_\mu), v \in D(\mathcal{L}_{\bar{\mu}})$,有

$$(\mathcal{L}_\mu u, v) = (u, \mathcal{L}_{\bar{\mu}} v) \tag{5.30}$$

实际上，令 $v_k \in C_0^\infty(H_n)$，且在 $V_0$ 中 $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v$. 因为 $T = [M_1, L_1]$，所以

$$(\mathcal{L}_\mu u, v) = \lim_{k\to\infty}(\mathcal{L}_\mu u, v_k) =$$

$$\lim_{k\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^n (L_j u, L_j v_k) + (\sum_{j=1}^n (M_j u, M_j v_k)) +$$

$$\mathrm{i}\mu((L_1 u, M_1 v_k) - (M_1 u, L_1 v_k))\Big]$$

从而

$$(\mathcal{L}_\mu u, v) = \sum_{j=1}^n [(L_j u, L_j v) + (M_j u, M_j v)] +$$

$$\mathrm{i}\mu[(L_1 u, M_1 v) - (M_1 u, L_1 v)] \tag{5.31}$$

同理可得

$$(u, \mathcal{L}_{\bar{\mu}} v) = \overline{(\mathcal{L}_{\bar{\mu}} v, u)} =$$

$$\sum_{j=1}^n [(L_j u, L_j v) + (M_j u, M_j v)] +$$

$$\mathrm{i}\mu[(L_1 u, M_1 v) - (M_1 u, L_1 v)] \tag{5.32}$$

从而由式(5.31)、式(5.32)可推出式(5.30).

然后，由式(5.30)可知 $\mathcal{L}_\mu^*$ 是 $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ 的延拓. 另外，取 $u \in C_0^\infty$，$v \in D(\mathcal{L}_\mu^*)$，有

$$(u, \mathcal{L}_\mu^* v) = (\mathcal{L}_\mu u, v) = (u, \mathcal{L}_{\bar{\mu}} v)$$

即在分布的意义下 $\mathcal{L}_{\bar{\mu}} v = \mathcal{L}_\mu^* v \in L^2$，因此 $v \in D(\mathcal{L}_{\bar{\mu}})$，且 $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ 为 $\mathcal{L}_\mu^*$ 的一个延拓算子.

所以 $\mathcal{L}_\mu^* = \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$，命题成立.

证毕.

**推论 5.1**　对每一个 $\mu \in \mathbf{C}$，算子 $\mathcal{L}_\mu$ 为 $L^2$ 上闭稠定算子.

**推论 5.2**　算子 $\mathcal{L}_\mu$ 是自伴算子当且仅当 $\mu$ 为实数.

与前面一样，记 $\mathcal{S}$ 为 Schwartz 空间.

对 $r>0$，令 $\delta_r(x,y,t)=(rx,ry,r^2t)$，其中 $(x,y,t)\in H_n$. 算子 $A:\mathscr{S}'(H_n)\to\mathscr{S}'(H_n)$ 被称为 $N$ 次齐次的，如果对任意 $r>0$，$f\in\mathscr{S}'$，有

$$A(f\circ\delta_r)=r^N A(f)\circ\delta_r$$

其中，若 $f\in\mathscr{S}$，则 $f\circ\delta_r(x,y,t)=f(\delta_r(x,y,t))$，且

$$(f\circ\delta_r,\varphi)=r^{-(2n+2)}(f,\varphi\circ\delta_{\frac{1}{r}}),\quad f\in\mathscr{S}',\varphi\in\mathscr{S}$$

给定 $z^0=(x^0,y^0,t^0)\in H_n$，定义算子 $L_{z^0}:\mathscr{S}'(H_n)\to\mathscr{S}'(H_n)$ 为

$$L_{z^0}f(z)=f(z^0z),\quad 对每个\ f\in\mathscr{S}'(H_n)$$

其中 $z^0z$ 如式(4.1)中定义. 称算子 $A$ 是左不变的，如果对每一个 $z^0\in H_n$，$AL_{z^0}=L_{z^0}A$.

容易证明下列命题成立.

**命题 5.2**　算子 $\mathcal{L}_\mu$ 是左不变的，且为 2 次齐次的.

为证明本节的主要结论，需要一些关于 Heisenberg 群上酉表示的基本性质，见第二章.

对 $(x,y,t)\in H_n$，$\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$，定义 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的酉表示 $\pi_\lambda(x,y,t)$ 如下：任取 $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，有

$$\pi_\lambda(x,y,t)f(\xi)=\mathrm{e}^{-i\lambda(t-\frac{1}{2}x\cdot y+|\lambda|^{-\frac{1}{2}}y\cdot\xi)}f(\xi-|\lambda|^{\frac{1}{2}}x)\tag{5.33}$$

取 $u\in\mathscr{S}(H_n)$，$u$ 的群 Fourier 变换定义如下：

$$\pi_\lambda(u)=\int_{H_n}u(x,y,t)\pi_\lambda(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\quad\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$$

下面给出一些重要的性质：

**引理 5.4**　设 $u\in\mathscr{S}(H_n)$，$\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$，则

(1) $\pi_\lambda(u)$ 为 $L^2(H_n)$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子，且 Plancherel 公式成立：

$$\int_{\mathbf{R}}\|\pi_\lambda(u)\|_{HS}^2|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=(2\pi)^{n+1}\int_{H_n}|u(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\tag{5.34}$$

(2) $u\to\pi_\lambda(u)$ 延拓为两个 Hilbert 空间间的酉对应，其中一

个 Hilbert 空间为 $L^2(H_n)$，另一个为由所有从 $\mathbf{R}$ 到 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子的函数构成的函数空间，具有范数

$$\left[\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{\mathbf{R}} \|\pi_\lambda(u)\|_{HS}^2 \, |\lambda|^n \mathrm{d}\lambda\right]^{\frac{1}{2}}$$

特别地，Plancherel 公式对 $u \in L^2(H_n)$ 仍然成立.

设 $X$ 为 $H_n$ 上的左不变向量场. 定义 $\pi_\lambda(X)$ 如下：

$$\pi_\lambda(X)\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\pi_\lambda(\exp\tau X)\big|_{\tau=0}\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(H_n)$$

对 $1 \leqslant j \leqslant n$，与前类似，可证明

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(L_j) &= -|\lambda|^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\ \pi_\lambda(M_j) &= -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\lambda \cdot |\lambda|^{\frac{1}{2}} \xi_j \\ \pi_\lambda(T) &= -\mathrm{i}\lambda \end{aligned} \tag{5.35}$$

这里式(5.33)、式(5.35) 与前几章叙述只是符号或记号有所不同，实质是一样的. 当 $X, Y$ 都是左不变向量场时，$\pi_\lambda(XY)$ 定义为 $\pi_\lambda(X)\pi_\lambda(Y)$，从而对 $H_n$ 上任意左不变微分算子 $P$，$\pi_\lambda(P)$ 可被自然地定义. 特别地，由式(5.35) 有

$$\begin{aligned} \pi_\lambda(\mathscr{L}_\mu) = |\lambda| \left[-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} - \xi_j^2\right) + \mu\,\mathrm{sgn}\lambda\right] = \\ |\lambda|(-\Delta_\xi + |\xi|^2 + \mu\,\mathrm{sgn}\lambda) \end{aligned}$$

**引理 5.5**　如果 $P$ 为 $H_n$ 上的左不变微分算子，$u \in \mathscr{E}' \cap L^2$，则

$$\pi_\lambda(Pu)\varphi = \pi_\lambda(u)\pi_\lambda(P^t)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$$

这由命题 3.6，推论 3.2 得到.

**命题 5.3**　如果 $u \in D(\mathscr{L}_\mu)$，则对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(H_n)$，有

$$\pi_\lambda(\mathscr{L}_\mu u)\varphi = |\lambda|\,\pi_\lambda(u)(-\Delta_\xi + |\xi|^2 - \mu\,\mathrm{sgn}\lambda)\varphi \tag{5.36}$$

**证明**　令 $|(x,y,t)|_{H_n} = [(|x|^2 + |y|^2)^2 + t^2)]^{\frac{1}{4}}$，取 $M(x,y,t) \in C_0^\infty$ 满足 $0 \leqslant M(x,y,t) \leqslant 1$，且

$$M(x,y,t)=\begin{cases}1, & |(x,y,t)|_{H_n}<1\\ 0, & |x,y,t|_{H_n}>2\end{cases}$$

令

$$M_R(x,y,t)=M\cdot\delta_{\frac{1}{R}}(x,y,t)=$$
$$M\left(\frac{1}{R}x,\frac{1}{R}y,\frac{1}{R^2}t\right),\quad R>0$$

对 $u\in D(\mathcal{L}_\mu)$，令 $u_R=M_Ru$，则 $u_R\in\mathscr{E}'\cap V_0$. 进一步将证明在 $L^2$ 中 $u_R\to u$，且 $\mathcal{L}_\mu u_R\to\mathcal{L}_\mu u$.

事实上，注意到当 $R\to\infty$ 时，有

$$\|u_R-u\|_{L^2}^2=\|(M_R-1)u\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$\int_{|(x,y,t)|_{H_n}>R}|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\to 0$$

由向量场的 Leibniz 法则有

$$\|\mathcal{L}_\mu u_R-\mathcal{L}_\mu u\|_{L^2}^2=\|\mathcal{L}_\mu[(M_R-1)u]\|_{L^2}^2=$$
$$\|(M_R-1)\mathcal{L}_\mu u-2\sum_{j=1}^n[(L_jM_R)(L_ju)+$$
$$(M_jM_R)(M_ju)]+u\mathcal{L}_\mu M_R\|_{L_2}^2\leqslant$$
$$C\{\|(M_R-1)\mathcal{L}_\mu u\|_{L^2}^2+\sum_{j=1}^n[\|L_jM_R)(L_ju)\|_{L^2}^2+$$
$$\|(M_jM_R)(M_ju)\|_{L^2}^2]+\|u\mathcal{L}_\mu M_R\|_{L^2}^2\}$$

因为

$$\|(M_R-1)\mathcal{L}_\mu u\|_{L^2}^2\leqslant\int_{x,y,t|_{H_n}>R}|\mathcal{L}_\mu u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\int_{H_n}|L_jM_R\cdot L_ju|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=$$
$$\int_{H_n}|L_j(M\cdot\delta_{\frac{1}{R}})\cdot L_ju|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant$$
$$R^{-2}\|L_jM\|_{L^\infty}^2\|L_ju\|_{L^2}^2$$

$$\int_{H_n}|M_jM_R\cdot M_ju|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant R^{-2}\|M_jM\|_{L^\infty}^2\|M_ju\|_{L^2}^2$$

$$\int_{H_n} |u \cdot \mathcal{L}_\mu M_R|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \leqslant R^{-4} \| \mathcal{L}_\mu M \|_{L^\infty}^2 \| u \|_{L^2}^2$$

所以

$$\| \mathcal{L}_\mu u_R - \mathcal{L}_\mu u \|_{L^2} \to 0, \quad 当 R \to \infty$$

由引理 5.4 和引理 5.5 知，对 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$，

$$\pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu u)\varphi = \pi_\lambda(\lim_{R\to\infty} \mathcal{L}_\mu u_R)\varphi = \lim_{R\to\infty}\pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu u_R)\varphi =$$
$$\lim_{R\to\infty}\pi_\lambda(u_R)\pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu^t)\varphi = \pi_\lambda(u)\pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu^t)\varphi =$$
$$\pi_\lambda(u)\pi_\lambda(\mathcal{L}_{-\mu})\varphi = |\lambda| \pi_\lambda(u)(-\Delta_\xi + |\xi|^2 - \mu \operatorname{sgn}\lambda)\varphi$$

命题证明完成.

### 5.3.2　谱结构定理

**定理 5.5**　令 $\sigma(\mathcal{L}_\mu)$ 为算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的谱，则 $\sigma(\mathcal{L}_\mu) = S(\mu)$ 对任一个 $\mu \in \mathbf{C}$ 成立.

**证明**　(1) $S(\mu) \supset \sigma(\mathcal{L}_\mu)$.

设 $z \in \mathbf{C}\backslash S(\mu)$，我们需要证明 $z$ 在算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的预解集 $\rho(\mathcal{L}_\mu)$ 中.

注意到由式(4.3)、式(5.29) 给出的集合 $S(\mu)$ 在复平面上为非空闭集，因此从 $z \in \mathbf{C}$ 到集合 $S(\mu)$ 的距离为正，记为 $c(z,\mu)$. 所以对 $\tau \geqslant 0, m \in I_+$，有

$$|z - \tau(2m + n \pm \mu)| \geqslant c(z,\mu) > 0 \tag{5.37}$$

对多重指标 $\beta \in I_+^n$，令 $\varphi_\beta(\xi)$ 为 Hermite 函数，已知 $\{\varphi_\beta\}_{\beta\in I_+^n}$ 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一组正交基，且

$$(-\Delta_\xi + |\xi|^2)\varphi_\beta(\xi) = (2|\beta| + n)\varphi_\beta \tag{5.38}$$

由式(5.37)、式(5.38)、式(5.34) 可知对 $u \in D(\mathcal{L}_\mu)$，有

$$(2\pi)^{n+1} \| \mathcal{L}_\mu u - zu \|_{L^2}^2 =$$
$$\int_{\infty}^{+\infty} \| \pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu u - zu) \|_{HS}^2 |\lambda|^n \mathrm{d}\lambda =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| \pi_\lambda(u)[|\lambda|(-\Delta_\xi + |\xi|^2 \mp \mu) - z] \|_{HS}^2 |\lambda|^n \mathrm{d}\lambda =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\beta}\|\pi_\lambda(u)[|\lambda|(-\Delta_\xi+|\xi|^2\mp\mu)-z]\varphi_\beta\|_{L^2}^2|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\beta}|z-|\lambda|(2|\beta|+n\mp\mu)|^2\|\pi_\lambda(u)\varphi_\beta\|_{L^2}^2|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda\geqslant$$

$$[c(z,\mu)]^2\int_{-\infty}^{+\infty}\|\pi_\lambda(u)\|_{HS}^2|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda=$$

$$(2\pi)^{n+1}[c(z,\mu)]^2\|u\|_{L^2}^2$$

即对每一个 $u\in D(\mathcal{L}_\mu)$，有

$$\|\mathcal{L}_\mu u-zu\|_{L^2}\geqslant c(z,\mu)\|u\|_{L^2}\tag{5.39}$$

即 $\mathcal{L}_\mu-zI$ 为一个内射.

下一步证明 $\mathcal{L}_\mu-zI$ 是满射.

令 $\mathscr{R}$ 为 $\mathcal{L}_\mu-zI$ 的值域，$\overline{\mathscr{R}}$ 为 $\mathscr{R}$ 的闭包，证明 $\overline{\mathscr{R}}=L^2$.

设 $v\in\overline{\mathscr{R}}^\perp$，则对每个 $u\in D(\mathcal{L}_\mu)$，有

$$(\mathcal{L}_\mu u-zu,v)=0$$

即 $(\mathcal{L}_\mu u,v)=(u,\bar{z}v)$，因此 $v\in D(\mathcal{L}_\mu^*)=D(\mathcal{L}_{\bar{\mu}})$，且

$$\mathcal{L}_{\bar{\mu}}v-\bar{z}v=0\tag{5.40}$$

另外，由 $S(\mu)$ 可推出 $z\in\mathbf{C}\backslash S(\mu)$ 当且仅当 $\bar{z}\in\mathbf{C}\backslash S(\mu)$. 从而由式(5.39)可知对每一个 $v\in D(\mathcal{L}_{\bar{\mu}})$，有

$$\|\mathcal{L}_{\bar{\mu}}v-\bar{z}v\|_{L^2}\geqslant c(\bar{z},\mu)\|v\|_{L^2}$$

结合式(5.40)可知 $v=0$，即 $\overline{\mathscr{R}}^\perp=\{0\}$. 由于 $L^2=\overline{\mathscr{R}}+\overline{\mathscr{R}}^\perp$，因此 $\overline{\mathscr{R}}=L^2$.

进一步，将证明 $\overline{\mathscr{R}}=\mathscr{R}$. 设 $f_j\in\mathscr{R}$，且在 $L^2(H_n)$ 中 $\lim\limits_{j\to\infty}f_j=f$，则存在 $u_j\in D(\mathcal{L}_\mu)$ 满足 $\mathcal{L}_\mu u_j-zu_j=f_j$. 注意到式(5.39)，

$$\|u_j-u_k\|_{L^2}\leqslant c(z,\mu)^{-1}\|f_j-f_k\|_{L^2}\to0\quad j,k\to\infty$$

因此存在 $u\in L^2(H_n)$，$\lim\limits_{j\to\infty}u_j=u$. 由推论 5.1 可知 $\mathcal{L}_\mu$ 为闭算子，从而 $\mathcal{L}_\mu-zI$ 也是闭算子，故 $u\in D(\mathcal{L}_\mu)$，且 $\mathcal{L}_\mu u-zu=f$，即 $f\in\mathscr{R}$. 所以 $\mathscr{R}$ 为 $L^2$ 中的闭集，由此可知 $\mathscr{R}=\overline{\mathscr{R}}=L^2$，即 $\mathcal{L}_\mu-zI$ 为满射.

综上所述，$\mathcal{L}_\mu - zI$ 为双射，且有有界逆，从而 $z \in \rho(\mathcal{L}_\mu) = \mathbf{C} \backslash \sigma(\mathcal{L}_\mu)$，即 $S(\mu) \supset \sigma(\mathcal{L}_\mu)$.

(2) $S(\mu) \subset \sigma(\mathcal{L}_\mu)$

令 $\mu_m^{\pm} = 2m + n \mp \mu, m \in I_+$. 我们断定对每一个 $m \in I_+$，$\mu_m^{\mp} \in \sigma(\mathcal{L}_\mu)$. 不然，我们假设存在 $m_0 \in I_+$，使 $\mu_{m_0}^{+} \in \rho(\mathcal{L}_\mu)$（对 $\mu_{m_0}^{-} \in \rho(\mathcal{L}_\mu)$ 的情形，可类似地讨论）. 故 $\mu_{m_0}^{+} I - \mathcal{L}_\mu$ 是从 $D(\mathcal{L}_\mu)$ 到 $L^2$ 的双射，所以对每一个 $f \in L^2(H_n)$，将存在唯一的 $u \in D(\mathcal{L}_\mu)$ 满足

$$\mu_{m_0}^{+} u - \mathcal{L}_\mu u = f$$

将 $\varphi_\beta$ 为 Heimite 函数，如前可得

$$[\mu_{m_0}^{+} \pi_\lambda(u) - \pi_\lambda(u) \pi_\lambda(\mathcal{L}_\mu)] \varphi_\beta = \pi_\lambda(f) \varphi_\beta$$

故

$$\pi_\lambda(f) \varphi_\beta = \pi_\lambda(u) [\mu_{m_0}^{+} - (2 \mid \beta \mid + n - \mu)] \varphi_\beta$$

从而对每一个 $f \in L^2(H_n)$，当 $|\beta| - m_0$ 时，

$$\pi_\lambda(f) \varphi_\beta = 0 \tag{5.41}$$

下面想找到一个函数 $f \in \mathscr{S}(H_n)$ 满足 $\pi_\lambda(f) \varphi_\beta \neq 0$，以此得到与式(5.41)的矛盾.

令

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|y|^2}, \quad y \in \mathbf{R}$$

令

$$f(x, y, t) = h(t) g(y) \overline{\varphi}_\beta(-x), \quad |\beta| = m_0$$

由式(5.33)可知

$$\pi_\lambda(f) \varphi_\beta(\xi) =$$

$$\int_{H_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t - \frac{1}{2}x \cdot y + |\lambda|^{-\frac{1}{2}} y \cdot \xi)} \cdot h(t) g(y) \overline{\varphi}_\beta(-x) \varphi_\beta(\xi - |\lambda|^{\frac{1}{2}} x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}t$$

上式对 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 和 $\lambda \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$ 均连续. 特别地，

$$[\pi_1(f)\varphi_\beta]\mid_{\xi=0} =$$

$$\hat{h}(1)\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{-i\frac{1}{2}x\cdot y} g(y) \mid \varphi_\beta(x) \mid^2 dx dy =$$

$$\hat{h}(1)\int_{\mathbf{R}^n} \hat{g}\left(\frac{1}{2}x\right) \mid \varphi_\beta(x) \mid^2 dx =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{8}|x|^2} \mid \varphi_\beta(x) \mid^2 dx > 0$$

即 $\pi_\lambda(f)\varphi_\beta \neq 0$. 断定成立.

由于 $\mathcal{L}_\mu$ 为齐次算子且为闭的，由命题 5.1 和推论 5.1 可知 $\sigma(\mathcal{L}_\mu)$ 为复平面上的闭锥. 从而 $\mu_m^{\pm} \in \sigma(\mathcal{L}_\mu)$ 说明 $l_m^{\pm} \in \sigma(\mathcal{L}_\mu)$，且因为 $l_0$ 上的每一点都是集$\{z \in l_m^+ \cup l_m, m = 0,1,2,\cdots\}$ 的极限点，所以 $l_0 \in \sigma(\mathcal{L}_\mu)$，从而 $S(\mu) \subset \sigma(\mathcal{L}_\mu)$，至此完成了定理 5.5 的证明.

### 5.3.3 特征值性质

**定理 5.6** 记 $\Lambda(\mu)$ 为算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的特征值集，对某个非负整数 $m$，当 $\mu = 2m+n$ 或 $\mu = -(2m+n)$ 时，则 $\Lambda(\mu) = \{0\}$；对任意非负整数 $m$，当 $\mu \neq \pm(2m+n)$ 时，$\Lambda(\mu)$ 为空集.

**证明** (1) 对任意 $m \in I_+$，考虑 $\mu \neq \pm(2m+n)$ 的情形.

为证明 $\mathcal{L}_\mu$ 没有特征值，只须证明对 $\alpha \in \mathbf{C}, u \in D(\mathcal{L}_\mu)$，如果 $\mathcal{L}_\mu u - \alpha u = 0$，则 $u = 0$ a. e..

由式(5.36) 和式(5.38)，可知

$$[\alpha - |\lambda|(2|\beta| + n \mp \mu)]\pi_\lambda(u)\varphi_\beta = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, \forall \beta \in I_+^n \tag{5.42}$$

由于任取 $m \in I_+$，有 $\mu \neq \pm(2m+n)$，可以令 $\tau_m^{\pm} = \dfrac{\mu}{2m+n\mp\mu}$.
式(5.42) 表明如果 $\pi_\lambda(u)\varphi_\beta \neq 0$，则对某个 $m \in I_+$，有 $\lambda = \tau_m^+$，或者 $\lambda = \tau_m^-$，$|\beta| = m$.

令

$$g(\lambda) = \left(\sum_{\beta} \|\pi_\lambda(u)\varphi_\beta\|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{n}{2}}$$

则

$$g(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda \neq \tau_m^{\pm}, m = 0,1,2,\cdots, \\ \left(\sum_{|\beta|=m} \|\pi_\lambda(u)\varphi_\beta\|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{n}{2}}, & \text{当 } \lambda = \tau_m^{\pm} \text{ 对某个 } m \in I_+ \end{cases}$$

因此 $g(\lambda) = 0$ a.e.，由 Pancherel 公式(5.34) 知

$$\|u\|_{L^2(H_n)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 0$$

故 $u = 0$ a.e.. 这完成了定理 5.6 第二部分的证明.

(2) 对某个 $m_0 \in I_+$，考虑 $\mu = (2m_0 + n)$ 或 $\mu = -(2m_0 + n)$ 的情形.

首先证明在这种情形下 $\alpha \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ 不是算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的特征值. 事实上，如情形(1) 中讨论过程，可以证明如果 $\lambda \neq \tau_m^{\pm}, m \in I_+ \backslash \{m_0\}$，则 $g(\lambda) = 0$ a.e.. 故 $u = 0$ a.e. 这证明了我们的断言.

下面将证明 $\alpha = 0$ 是算子 $\mathcal{L}_\mu$ 的特征值. 为此将寻找一个函数 $u \in \mathcal{S}(H_n)$，$u \neq 0$ 满足 $\mathcal{L}_\mu u = 0$.

注意到如果 $\mathcal{L}_\mu[u(x,y,t)] = 0$，则 $\mathcal{L}_{-\mu}[u(-x,y,-t)] = 0$. 故只须考虑 $\mu = 2m_0 + n$ 的情况即可.

取 $\beta \in I_+^n$ 满足 $|\beta| = m_0$. 令

$$\phi = e^{i(t + \frac{1}{2}x \cdot y)} \varphi_\beta(y) \tag{5.43}$$

可以断定

$$\mathcal{L}_\mu \phi = 0 \tag{5.44}$$

事实上，对 $1 \leqslant j \leqslant m$，有

$$L_j\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}y_j \frac{\partial}{\partial t}\right)\phi = iy_j\phi$$

$$L_j^2\phi = -y_j^2\phi$$

$$M_j\phi = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{1}{2}x_j \frac{\partial}{\partial t}\right)\phi = e^{i(t + \frac{1}{2}x \cdot y)} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_j}$$

$$M_j^2\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\frac{1}{2}x\cdot y)}\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial y_j^2}$$

$$\mathrm{i}\mu T\phi = \mathrm{i}\mu\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\frac{1}{2}x\cdot y)}\varphi_\beta$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mu\phi &= -\sum_{j=1}^n(L_j^2+M_j^2)\phi+\mathrm{i}\mu T\phi = \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\frac{1}{2}x\cdot y)}[-\Delta_y\varphi_\beta(y)+(|y|^2-\mu)\varphi_\beta(y)] = \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\frac{1}{2}x\cdot y)}[2|\beta|+n-(2m+n)]\varphi_\beta = 0\end{aligned}$$

即式(5.44)成立.

现在取 $f\in C_0^\infty([a,b])$，其中 $0<a<b<+\infty$，取 $g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，令

$$u(x,y,t) = \int_a^b\int_{\mathbf{R}^n}\phi[(0,\xi,0)\delta_{\lambda^{\frac{1}{2}}}(x,y,t)]g(\xi)f(\lambda)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda \tag{5.45}$$

因为 $\mathcal{L}_\mu$ 是一个左不变齐性线性微分算子，所以 $\mathcal{L}_\mu\phi=0$ 可推出 $\mathcal{L}_\mu u=0$.

最后将证明 $u\in\mathcal{S}(H_n)$. 事实上，由式(4.1)、式(5.43)、式(5.45)可知

$$u(x,y,t) = \int_a^b f(\lambda)\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda t+\frac{\lambda}{2}x\cdot y+\lambda^{\frac{1}{2}}x\cdot\xi)}g(\xi)\varphi_\beta(\lambda^{\frac{1}{2}}y+\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda$$

即

$$u(x,y,t) = \int_a^b f(\lambda)V(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda^{\frac{1}{2}}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}\lambda \tag{5.46}$$

其中

$$V(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}x\cdot y}\int_{\mathbf{R}^n}g(\xi)\varphi_\beta(y+\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}x\cdot y}W(x,y) \tag{5.47}$$

则由分部积分看到 $W(x,y) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$，故也有 $V(x,y) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. 注意到 $f(\lambda) \in C_0^\infty([a,b])$，$0 < a < b < \infty$，结合式(5.46)可知 $u \in \mathscr{S}(H_n)$. 容易看到当 $g \not\equiv 0$ 且 $f \not\equiv 0$ 时，由式(5.46)和式(5.47)知 $u \not\equiv 0$. 证毕.

**推论 5.3**　设 $\mu \in \mathbf{R}$，则当 $|\mu| \leqslant n$ 时，

$$\sigma(\mathscr{L}_\mu) = (0, +\infty)$$

当 $|\alpha| > n$ 时，

$$\sigma(\mathscr{L}_\mu) = (-\infty, +\infty)$$

# 第二部分

# 拟齐性线性偏微分算子

# 第六章　拟齐性偏微分算子的基本性质

拟齐性偏微分算子包括许多重要的特例，如经典的位势算子、波算子、热算子以及近十余年来已成为研究热点的齐次群（也称分层幂零 Lie 群或 Carnot 群）上的齐性左（右）不变微分算子．另一个典型的例子是研究 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中拟凸域 $D_k = \{(z_0, z) \in \mathbf{C}^{n+1}, \mathrm{Im} z_0 < |z|^{2k}\}$ 上的 $\bar{\partial}$-Neumann 问题时自然产生的微分算子 $\mathcal{L}_\alpha$：

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Z_j\bar{Z}_j + \bar{Z}_j Z_j) - \frac{1}{2}\alpha\sum_{j=1}^{n}[Z_j, \bar{Z}_j]$$

其中 $Z_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j} + \mathrm{i}kz_j^{k-1}\bar{z}_j^k\dfrac{\partial}{\partial t}$ 是 $D_k$ 的边界 $\partial D_k$ 上的解析切向量场，$t = \mathrm{Re}z_0$，$j = 1,2,\cdots,n$，$\alpha$ 为复数，$[Z_j, \bar{Z}_j] = Z_j\bar{Z}_j - \bar{Z}_j Z_j$.

易知 $\mathcal{L}_\alpha$ 关于 $\delta_r(z,t) = (rz, r^{2k}t)(r > 0)$ 是二阶齐性线性偏微分算子（LPDO）.

正如参考文献[26]中指出的，当 $k = 1$ 时，$Z_j(j = 1,\cdots,n)$ 是 Heisenberg 群上左不变向量场．当 $k$ 为大于 1 的正整数时，则不是任何幂零群上的不变向量场．这并不奇怪，因为拟齐性 LPDO 是通过关于伸缩群的不变性来刻画的，不必兼有其他群结构．

近 20 年来，人们对于某些幂零群上的平移不变拟齐性微分算子已有相当深入的研究（见参考文献[44]），但对于一般的拟齐性偏微分算子则尚无专门研究，人们对这类算子的深层性质所知甚少．值得一提的是，最近参考文献[14,35,36,38]分别研究了这类算子的局部可解性和亚椭圆性，得到了别具一格的必要条件，从不同侧面揭示了广义齐性 LPDO 的特性及其引人入胜之处．因此对这类算子的研究是颇有可为的．

6.1 节介绍 $\mathbf{R}^n$ 上的伸缩变换及由此导出的范数(或模)函数，由此得到一个极坐标变换性质；6.2 节引入拟齐次函数，讨论其性质；6.3 节研究拟齐次广义函数；6.4 节介绍拟齐性线性偏微分算子；6.5 节为拟齐次分布的延拓；6.6 节为拟齐性偏微分算子(PDO)的谱性质.

## 6.1 伸缩变换

**定义 6.1** 设给定正数 $a_1,\cdots,a_n$，定义伸缩变换(或广义相似变换)$\delta_\tau(\tau>0):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 如下：

$$\delta_\tau(x)=(\tau^{a_1}x_1,\cdots,\tau^{a_n}x_n),\qquad \forall x\in\mathbf{R}^n$$

特别地，若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，则称 $\delta_\tau$ 为相似变换.

显然，伸缩变换具有如下性质：

(1) $\delta_s\circ\delta_\tau=\delta_{s\tau}$；

(2) $\delta_1=I$；

(3) $\lim\limits_{\tau\to 0}\delta_\tau(x)=(0,0,\cdots,0)$；

(4) $\delta_\tau^{-1}=\delta_{\tau^{-1}}$. 这由(1),(2) 立即得到.

**定理 6.1** 记一阶线性偏微分算子 $L(x,\partial)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_jx_j\partial_j$，则当 $f\in C^1(\mathbf{R}^n)$ 时，有

$$\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f\circ\delta_\tau)=L[f]\circ\delta_\tau \tag{6.1}$$

其中 $f\circ\delta_\tau(x)=f(\delta_\tau(x))=f(\tau^{a_1}x_1,\cdots,\tau^{a_n}x_n)$，$\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

**证明**

$$\text{左边}=\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}f(\tau^{a_1}x_1,\cdots,\tau^{a_n}x_n)=$$

$$\tau\sum_{j=1}^{n}\partial_jf(\tau^{a_1}x_1,\cdots,\tau^{a_n}x_n)a_j\tau^{a_j-1}x_j=$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \tau^{a_j} x_j \partial_j f(\tau^{a_1} x_1, \cdots, \tau^{a_n} x_n) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \partial_j f\right) \circ \delta_\tau(x) =$$

$$L[f] \circ \delta_\tau(x) = \text{右边}$$

证毕.

**推论 6.1**　$L[f] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} f \circ \delta_\tau\right)_{\tau=1}$.

几何意义:设 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 固定,令

$$y_x(\tau) = \delta_\tau(x) = (\tau^{a_1} x_1, \cdots, \tau^{a_n} x_n)$$

其中 $0 \leqslant \tau < +\infty$,则 $y_x(\tau)$ 为空间 $\mathbf{R}^n$ 中一曲线的参数方程($\tau$ 为参数). 注意到

$$y_x(0) = (0, 0, \cdots, 0), \quad y_x(1) = x$$

即曲线经过原点及 $x$. 由推论 6.1$L[f]$ 表示 $f$ 在点 $x$ 处沿着该曲线的方向导数. 从伸缩变换的性质可以看出,伸缩族 $\{\delta_\tau\}_{\tau>0}$ 按照乘法 $\delta_S \circ \delta_\tau = \delta_{S\tau}$ 构成一个单参数变换群,故称 $L$ 为 $\{\delta_\tau\}_{\tau>0}$ 的生成元.

相应于伸缩变换,可以找到如下的范数函数.

**定理 6.2**　存在函数 $r(x)$ 满足条件:

(1) $r(x) \geqslant 0$,且 $r(x) \in C(\mathbf{R}^n) \cap C^\infty(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$;$r = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $r \circ \delta_\tau(x) = \tau r(x)$;

(3) 取 $a_* = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{a_j\}$,$a^* = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{a_j\}$,则有

$$r(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow \| x \| \geqslant 1, \text{且 } r(x)^{a_*} \leqslant \| x \| \leqslant r(x)^{a^*}$$

$$r(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow \| x \| \leqslant 1, \text{且 } r(x)^{a^*} \leqslant \| x \| \leqslant r(x)^{a_*}$$

特别地,$r(x) = 1 \Leftrightarrow \| x \| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.

**证明**　对 $x \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$,考虑隐函数方程

$$\| \delta_{\frac{1}{r}}(x) \| = 1$$

即 $\sum_{j=1}^{n}(r^{-a_j}x_j)^2-1=0$. 取

$$F(r,x)=\sum_{j=1}^{n}(r^{-a_j}x_j)^2-1$$

固定 $x\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，令 $F_x(r)=F(r,x)$. 因为

$$F'_r=-2\sum_{j=1}^{n}a_jx_jr^{-a_j-1}(r^{-a_j}x_j)=-\frac{2}{r}\sum_{j=1}^{n}a_j(r^{-a_j}x_j)^2<0$$

所以在 $(0,+\infty)$ 上 $F_x(r)$ 关于 $r$ 连续且严格递减. 另外注意到

$$\lim_{r\to+\infty}F_x(r)=-1,\quad \lim_{r\to0+}F_x(r)=+\infty$$

由介值定理可知存在唯一的 $r(x)(0<r(x)<+\infty)$ 满足 $F(r(x),x)=0$.

补充定义 $r(0)=0$，可证 $\lim_{x\to0}r(x)=0$，即在原点处连续. 实际上，若 $r(x)$ 在原点处不连续，则存在点列 $x^{(k)}\to0$ 及常数 $1>c>0$，使 $r(x^{(k)})\geqslant c>0$. 因为

$$0=\sum_{j=1}^{n}(r(x^{(k)})^{-a_j})(x_j^{(k)})^2-1\leqslant\sum_{j=1}^{n}c^{-2a_j}(x_j^{(k)})^2-1$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(k)})^2\geqslant c^{2a^*}$$

即 $\|x^{(k)}\|\geqslant c^{a^*}$，这与 $x^{(k)}\to0$ 互相矛盾.

另外，可以利用隐函数求导方法讨论 $r(x)$ 在点 $x\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 处的可微性，从而条件(1) 满足.

对于 $\tau>0$ 和 $x\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，有

$$0=F(r(\delta_\tau(x)),\delta_\tau(x))=\sum_{j=1}^{n}\left[(r(\delta_\tau(x)))^{-a_j}\tau^{a_j}x_j\right]^2-1=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{r(\delta_\tau(x))}{\tau}\right)^{-a_j}x_j\right]^2-1=F\left(\frac{r(\delta_\tau(x))}{\tau},x\right)$$

由唯一性可知 $r(x)=\dfrac{r(\delta_\tau(x))}{\tau}$，即 $r(\delta_\tau(x))=\tau r(x)$. 对于 $x=0$

时显然成立，$r(\delta_\tau(x)) = \tau r(x)$，即条件(2)成立.

下面证明条件(3). 当 $r(x) \geqslant 1$ 时，容易从 $\| \delta_{\frac{1}{r}}(x) \|^2 = \sum_{j=1}^{n} r^{-2a_j} x_j^2 = 1$ 得到

$$r(x)^{a_*} \leqslant \| x \| \leqslant r(x)^{a^*}$$

以及 $\| x \| \geqslant 1$. 另外，当 $\| x \| \geqslant 1$，即 $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geqslant 1$ 时，则有

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{x_j}{r(x)^{a_j}} \right]^2 - 1 \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{1}{r(x)^{2a_j}} - 1 \right] x_j^2 \tag{6.2}$$

当 $x$ 给定时，$r(x)$ 也确定. 从而当 $r(x) \geqslant 1$ 时，$\frac{1}{r(x)^{2a_j}} - 1 \leqslant 0$；当 $r(x) \leqslant 1$ 时，$\frac{1}{r(x)^{2a_j}} - 1 \geqslant 0$，即式(6.2)中系数不变号(同时为正或同时为负)，所以为使式(6.2)成立，必有 $r(x) \geqslant 1$. 对 $r(x) \leqslant 1$ 的情形同理可证. 证毕.

**命题 6.1**　利用伸缩变换和相应的范数函数，可以建立一个极坐标变换，且有 $\mathrm{d}x = r^{|a|-1}\omega(\sigma)\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma$，其中 $\sigma \in S_1$，$S_1$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面，$\omega(\sigma)$ 是 $S_1$ 上的非负 $C^\infty$ 函数.

**证明**　作极坐标变换

$$(x_1, \cdots, x_n) = \Phi(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \tag{6.3}$$

其中，$\theta_j \in (0, \pi)$，$1 \leqslant j \leqslant n-2$；$\theta_{n-1} \in (0, 2\pi)$. 具体地，有

$$x_1 = r^{a_1} \cos\theta_1$$

$$x_2 = r^{a_2} \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

$$x_3 = r^{a_3} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = r^{a_{n-1}} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}$$

$$x_n = r^{a_n} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}$$

下面计算 Jacobi 行列式 $J(\Phi)$. 计算得到

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}=\frac{a_1}{r}x_1,\quad \frac{\partial x_1}{\partial\theta_1}=-\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}x_1,\quad \frac{\partial x_1}{\partial\theta_j}=0,\quad (2\leqslant j\leqslant n-1)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial r}=\frac{a_2}{r}x_2,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\theta_1}=\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}x_2,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\theta_2}=-\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}x_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\theta_j}=0,\quad (3\leqslant j\leqslant n-1)$$

……

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial r}=\frac{a_{n-1}}{r}x_{n-1},\quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_1}=\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}x_{n-1},\cdots,$$

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_{n-2}}=\frac{\cos\theta_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}x_{n-1},\quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_{n-1}}=-\frac{\sin\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}}x_{n-1};$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial r}=\frac{a_n}{r}x_n,\quad \frac{\partial x_n}{\partial\theta_1}=\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}x_n,\cdots,\quad \frac{\partial x_n}{\partial\theta_{n-2}}=\frac{\cos\theta_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}x_n,$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial\theta_{n-1}}=\frac{\cos\theta_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}x_n,$$

因此

$$J(\Phi)=\frac{1}{r}\prod_{k=1}^{n}x_n\cdot\begin{vmatrix} a_1 & -\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & -\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} & \cdots & \cdots & \frac{\cos\theta_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}} & -\frac{\sin\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}}\\ a_n & \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} & \cdots & \cdots & \frac{\cos\theta_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}} & \frac{\cos\theta_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

从最末行起，每一行依次减去上一行；然后再从最末一行起，依次把第 $k$ 行的 $\sin^2\theta_{k-1}$ 倍加到上一行，得到

$$J(\Phi)=r^{|a|-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & \dfrac{1}{\sin\theta_1\cos\theta_1} & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-2}} & 0 \\ A_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}} \end{vmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 = {} & a_1+(a_2-a_1)\sin^2\theta_1+(a_3-a_2)\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+ \\ & (a_4-a_3)\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3+\cdots+ \\ & (a_n-a_{n-1})\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-1}= \\ & a_1(1-\sin^2\theta_1)+a_2\sin^2\theta_1(1-\sin^2\theta_2)+ \\ & a_3\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2(1-\sin^2\theta_3)+\cdots+ \\ & a_{n-1}\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}(1-\sin^2\theta_{n-1})+ \\ & a_n\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}= \\ & a_1\cos^2\theta_1+a_2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2+a_3\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots+ \\ & a_{n-1}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-2}\cos^2\theta_{n-1}+ \\ & a_n\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1} \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} J(\Phi) = {} & r^{|a|-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k)\cdot A_1\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\theta_k\cos\theta_k}= \\ & r^{|a|-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\theta_k\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{n-k}\theta_k\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\theta_k\cos\theta_k}\cdot \\ & [a_1\cos^2\theta_1+a_2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2+ \\ & a_3\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots+ \\ & a_{n-1}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-2}\cos^2\theta_{n-1}+ \end{aligned}$$

$$a_n\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}] =$$

$$r^{|a|-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{n-(k+1)}\theta_k\cdot[a_1\cos^2\theta_1+a_2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2+$$

$$a_3\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3+\cdots+$$

$$a_{n-1}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^2\theta_{n-2}\cos^2\theta_{n-1}+$$

$$a_n\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}] =$$

$$r^{|a-1}\omega(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$$

将 $\omega$ 展开就得到

$$\omega(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) =$$

$$a_1\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\sin^{n-4}\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos^2\theta_1+$$

$$a_2\sin^{n}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\sin^{n-4}\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos^2\theta_2+$$

$$a_3\sin^{n}\theta_1\sin^{n-1}\theta_2\sin^{n-4}\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos^2\theta_3+\cdots+$$

$$a_{n-1}\sin^{n}\theta_1\sin^{n-1}\theta_2\sin^{n-2}\theta_3\cdots\sin^3\theta_{n-2}\cos^2\theta_{n-1}+$$

$$a_n\sin^{n}\theta_1\sin^{n-1}\theta_2\sin^{n-2}\theta_3\cdots\sin^3\theta_{n-2}\sin^2\theta_{n-1}$$

证毕.

## 6.2 拟齐次函数

**定义 6.2** 设函数 $f$ 定义于 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$). 若存在 $k\in\mathbf{C}$,使得

$$f\circ\delta_\tau(x)=\tau^k f(x),\quad \forall\,\tau>0,\forall\,x\in\mathbf{R}^n(\text{或 }\mathbf{R}^n\setminus\{0\}) \tag{6.4}$$

则称 $f$(关于 $\delta_\tau$) 在 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$) 上是 $k$ 次拟齐次的. 特别地,当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时,即为通常的齐次定义.

**例 6.1** 函数 $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ 关于 $\delta_\tau(x_1,x_2)=(\tau x_1,\tau x_2)$ 是 2 次拟齐次函数:

$$f\circ\delta_\tau(x)=\tau^2 f(x)$$

**例 6.2**　函数 $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1-x_2}{x_1^2+x_2^2}$ 关于 $\delta_\tau(x_1,x_2)=(\tau x_1,\tau x_2)$ 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 上是 $-1$ 次拟齐次函数.

**例 6.3**　函数 $f(x_1,x_2)=|x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}$ 关于 $\delta_\tau(x_1,x_2)=(\tau^{a_1}x_1,\tau^{a_2}x_2)$ 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 是 $k=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$ 次拟齐次函数：

$$f(\delta_\tau(x))=\tau^{a_1a_1+a_2a_1}|x_1|^{\alpha_1}\cdot|x_2|^{\alpha_2}$$

**例 6.4**　对 $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2$，取 $\delta_\tau(x_1,x_2)=(\tau x_1,\tau^2x_2)$，则

$$f(\delta_\tau(x_1,x_2))=\tau^2(x_1^2-x_2)=\tau^2f(x_1,x_2)$$

故 $f$ 在 $a_1=1,a_2=2$ 的意义下是二次拟齐次的.

**例 6.5**　$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1-x_2$ 不会成为拟齐次函数.但 $f(x_1,x_2)$ 可表为两个拟齐次函数 $x_1^2-x_2$ 和 $2x_1$ 之和.

可以证明,任意多项式都可以写成有限个拟齐次函数的和.

**命题 6.2**　设 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 为 $k$ 次拟齐次函数,则 $\partial^\alpha f$ 为 $k-a\cdot\alpha$ 次拟齐次的,其中 $a\cdot\alpha\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_{j=1}^n a_j\alpha_j$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in I_+^n$（即为 $n$ 重非负整数),$\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

**证明**　因为 $f$ 为 $k$ 次拟齐次函数,所以

$$f\circ\delta_\tau(x)=\tau^kf(x)$$

上式等号两边同时对 $x$ 求 $\partial^\alpha$,则得

$$左边=\partial^\alpha f(\tau^{a_1}x_1,\cdots,\tau^{a_n}x_n)=\tau^{a\cdot\alpha}(\partial_x^\alpha f)\circ\delta_\tau(x)$$

$$右边=\tau^k\partial_x^\alpha f(x)$$

所以 $(\partial^\alpha f)\circ\delta_\tau(x)=\tau^{k-a\cdot\alpha}\partial^\alpha f(x)$,证毕.

**命题 6.3**　（广义的 Euler 定理）　设 $f\in C^1(\mathbf{R}^n)$,则 $f$ 为 $\lambda$ 次拟齐次函数,当且仅当

$$L[f]=\lambda f \tag{6.5}$$

这里 $L=\sum\limits_{j=1}^n a_jx_j\partial_j$.

**证明** 必要性:若 $f$ 为 $\lambda$ 次拟齐次函数,则

$$f \circ \delta_\tau(x) = \tau^\lambda f(x)$$

由定理 6.1,有

$$L[f] \circ \delta_\tau(x) = \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f \circ \delta_\tau(x)) = \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tau^\lambda f(x)) = \lambda \tau^\lambda f(x)$$

取 $\tau = 1$,有 $L[f] = \lambda f$.

充分性:若 $L[f] = \lambda f$,由定理 6.1 有

$$\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f \circ \delta_\tau(x)) = L[f] \circ \delta_\tau(x) = \lambda f \circ \delta\tau(x)$$

记 $g(\tau) = f \circ \delta_\tau$,则上式变为 $\tau \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} g(\tau) = \lambda g(\tau)$. 解此常微分方程得 $g(\tau) = C\tau^\lambda$($C$ 与 $\lambda$ 无关). 另外,注意到 $g(1) = f(x)$,即 $C = f(x)$. 从而 $g = \tau^\lambda f$,即 $f \circ \delta_\tau = \tau^\lambda f$. 证毕.

**命题 6.4** 设 $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是 $k$ 次拟齐次函数,则 $f$ 必为 $k$ 次拟齐次多项式,且 $k \in M^+ = \{a \cdot \beta, \beta \in I_+^n\}$.

**注 6.1** 任意非零常数 $C$ 为零次拟齐次多项式,0 为任意次拟齐次多项式.

**证明** 记 $a_* = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{a_j\}$.

(1) 若 $k < 0$,可以推出 $f \equiv 0$. 事实上,因为 $f$ 为 $k$ 次拟齐次函数,则有

$$f \circ \delta_\tau = \tau^k f$$

令 $\tau \to 0^+$,有 $f(0) = f(x) \lim\limits_{\tau \to 0^+} \tau^k$,所以 $f \equiv 0$.

(2) 若 $k \geqslant 0$. 由命题 6.2 可得 $\partial^\alpha f$ 为 $k - a \cdot \alpha$ 次拟齐次的. 令 $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j$. 当 $|\alpha| > \dfrac{k}{a_*}$ 时,$k - a \cdot \alpha \leqslant k - a_* |\alpha| < 0$,由(1)的结论,$\partial^\alpha f \equiv 0$. 结合 $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < \frac{k}{a_*}} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

因为 $f$ 为 $k$ 次拟齐次的，即 $x^{\alpha}$ 满足 $k$ 次拟齐次，故 $a\cdot\alpha=k$，所以 $f(x)=\sum\limits_{a\cdot\alpha=k}\dfrac{\partial^{\alpha}f(0)}{\alpha!}x^{\alpha}$. 证毕.

**注 6.2**　若 $f\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$，此定理不一定成立. 例如 $f(x)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

**注 6.3**　在 $f\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 的条件下，若 $f$ 拟齐次且不为多项式，则 $f$ 在原点一定奇异.

**注 6.4**　条件 $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 可以减弱为 $C^{P}(\mathbf{R}^n)\left(P=\left[\dfrac{k}{a_*}\right]+1\right)$.

## 6.3　拟齐次广义函数(分布)

对任意 $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$，当 $f$ 为通常函数时，有

$$\langle f\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=\int f\circ\delta_\tau\varphi(x)\mathrm{d}x$$

令 $y=\delta_\tau(x)$，则 $\mathrm{d}x=\tau^{-|a|}\mathrm{d}y$，有

$$\langle f\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=\int f(y)\varphi(\delta_{\tau^{-1}}(y))\,|\tau|^{-a}\mathrm{d}y=$$
$$\langle f,\tau^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle$$

从而对广义函数 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，定义 $f\circ\delta_\tau$ 为

$$\langle f\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=\langle f,\tau^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle$$

**定义 6.3**　设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. 若 $f\circ\delta_\tau=\tau^k f$，则称 $f$ 是 $k$ 次拟齐次广义函数，或称 $f$ 是 $k$ 次拟齐次分布. 这里 $f\circ\delta_\tau=\tau^k f$ 是指

$$\langle f\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=\langle f,\tau^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}(x)\rangle=\tau^k\langle f,\varphi\rangle\tag{6.6}$$

或

$$\langle f,\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}(x)\rangle=\tau^{k+|a|}\langle f,\varphi\rangle\tag{6.7}$$

**例 6.6**　Dirac 函数 $\delta(x)$ 是指 $\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$，$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$. 因为 $\langle\delta\circ\delta_\tau(x),\varphi(x)\rangle=\langle\delta(x),\tau^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}(x)\rangle=\tau^{-|a|}\varphi(0)=$

$\tau^{-|a|}\langle\delta,\varphi\rangle$，所以 $k=-|a|$，即 Dirac 函数是 $-|a|$ 次拟齐次的.

**命题 6.5** $u$ 是 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 上的 $\lambda$ 次拟齐次分布当且仅当

$$Lu=\lambda u \tag{6.8}$$

**证明** 必要性：对 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$，由拟齐次分布的定义有

$$\langle u,\varphi\circ\delta_\tau\rangle=\tau^{-(\lambda+|a|)}\langle u,\varphi\rangle$$

以 $\tau\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 作用于上式等号两边可得

$$\langle u,L[\varphi]\circ\delta_\tau\rangle=-(\lambda+|a|)\tau^{-(\lambda+|a|)}\langle u,\varphi\rangle$$

令 $\tau=1$，得

$$-(\lambda+|a|)\langle u,\varphi\rangle=\langle u,L[\varphi]\rangle=$$
$$\langle L^t u,\varphi\rangle=\langle -Lu-|a|u,\varphi\rangle$$

从而 $\langle Lu,\varphi\rangle=\lambda\langle u,\varphi\rangle$，即 $Lu=\lambda u$.

充分性：对 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$，有

$$\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=\langle u,\tau^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle$$

以 $\tau\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 作用于上式等号两边可得

$$\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=$$

$$\langle u,-|a|\tau^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle+\langle u,\tau^{-|a|}\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle=$$

$$-|a|\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle+$$

$$\tau^{-|a|+1}\langle u,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\varphi(\tau^{-a_1}x_1,\tau^{-a_2}x_2,\cdots,\tau^{-a_n}x_n))\rangle=$$

$$-|a|\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle+$$

$$\tau^{-|a|+1}\langle u,\sum_{j=1}^n-a_j\tau^{-a_j-1}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle=$$

$$-|a|\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle-\tau^{-|a|}\langle u,L\varphi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle=$$

$$-|a|\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle-\langle u\circ\delta_\tau,L\varphi\rangle=$$

$$-|a|\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle-\langle L^t(u\circ\delta_\tau),\varphi\rangle=$$

$$-|a|\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle+\langle L(u\circ\delta_\tau)+|a|u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=$$
$$\langle L(u\circ\delta_\tau),\varphi\rangle=\lambda\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle$$

记 $g(\tau)=\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle$，则上式化为

$$\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g(\tau)=\lambda g(\tau)$$

解之得 $g(\tau)=C\tau^\lambda$. 注意到 $g(1)=\langle u,\varphi\rangle$，所以

$$\langle u\circ\delta_\tau,\varphi\rangle=\tau^\lambda\langle u,\varphi\rangle$$

证毕.

## 6.4　拟齐性 LPDO

**定义 6.4**　设 $P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有 $C^\infty$ 系数的线性偏微分算子(LPDO)，$a_\alpha(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，其象征为 $P(x,\xi)=\sum_{\alpha\leqslant k}a_\alpha(x)\xi^\alpha$. 若对任意的 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，有

$$P[f\circ\delta_\tau(x)]=\tau^m P[f]\circ\delta_\tau(x)\tag{6.9}$$

则称 $P$ 为 $m$ 次拟齐性 LPDO(见参考文献[36,37]).

**例 6.7**　算子 $P=\partial_1^2-\partial_2$ 关于 $\delta_\tau(x_1,x_2)=(\tau x_1,\tau^2x_2)$ 是 2 次拟齐性 LPDO. 事实上，

$$P[f\circ\delta_\tau(x)]=\partial_1^2f(\tau x_1,\tau^2x_2)\cdot\tau^2-\partial_2f(\tau x_1,\tau^2x_2)\cdot\tau^2=$$
$$\tau^2[(\partial_1^2-\partial_2)f\circ\delta_\tau]=\tau^2P[f]\circ\delta_\tau(x)$$

**定理 6.3**　$P(x,\partial)=\sum_{\alpha\leqslant k}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ 为具有 $C^\infty$ 系数的 $m$ 次拟齐性 LPDO 当且仅当

$$P=\sum_{a\cdot\alpha-a\cdot\beta=m,\ |\alpha|\leqslant k}A_{\beta,\alpha}x^\beta\partial^\alpha\tag{6.10}$$

其中 $A_{\beta,\alpha}$ 都是常数.

**证明**　充分性：对任意 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，

$$P[f\circ\delta_\tau]=\sum_{\substack{a\cdot\alpha-a\cdot\beta=m\\|\alpha|\leqslant k}}A_{\beta,\alpha}x^\beta\partial^\alpha[f\circ\delta_\tau(x)]=$$

$$\sum_{\substack{a\cdot\alpha-a\cdot\beta=m\\|\alpha|\leqslant k}}A_{\beta,\alpha}x^\beta\cdot\tau^{a\cdot\alpha}(\partial^\alpha f)(\delta_\tau(x))=$$

$$\tau^m\sum_{\substack{a\cdot\alpha-a\cdot\beta=m\\|\alpha|\leqslant k}}A_{\beta,\alpha}x^\beta\cdot\tau^{a\cdot\beta}(\partial^\alpha f)(\delta_\tau(x))=$$

$$\tau^m\sum_{\substack{a\cdot\alpha-a\cdot\beta=m\\|\alpha|\leqslant k}}A_{\beta,\alpha}(\delta_\tau(x))^\beta(\partial^\alpha f)(\delta_\tau(x))=$$

$$\tau^mP[f]\circ\delta_\tau$$

故 $P$ 为 $m$ 次拟齐性 LPDO.

现在证明必要性. 由假设有 $P[f\circ\delta_\tau(x)]=\tau^mP[f]\circ\delta_\tau(x)$.

取 $f(x)=\mathrm{e}^{\xi\cdot x}\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,其中 $\xi\cdot x=\sum_{j=1}^n\xi_jx_j$,$\xi\in\mathbf{R}^n$,则有

$$P[f]=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)\partial^\alpha f=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)\xi^\alpha\mathrm{e}^{\xi\cdot x}$$

$$P[f]\circ\delta_\tau(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(\delta_\tau(x))\xi^\alpha\mathrm{e}^{\xi\cdot\delta_\tau(x)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(\delta_\tau(x))\xi^\alpha\mathrm{e}^{\delta_\tau(\xi)\cdot x}$$

另外,注意到 $f\circ\delta_\tau(x)=\mathrm{e}^{\xi\cdot\delta_\tau(x)}=\mathrm{e}^{\delta_\tau(\xi)\cdot x}$,从而

$$P[f\circ\delta_\tau(x)]=P[\mathrm{e}^{\delta_\tau(\xi)\cdot x}]=$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)(\delta_\tau(\xi))^\alpha\mathrm{e}^{\delta_\tau(\xi)\cdot x}=$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)\tau^{a\cdot\alpha}\xi^\alpha\mathrm{e}^{\delta_\tau(\xi)\cdot x}=$$

$$\tau^m\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(\delta_\tau(x))\xi^\alpha\mathrm{e}^{\delta_\tau(\xi)\cdot x}$$

比较 $\xi^\beta$ 的系数可得

$$a_\alpha\circ\delta_\tau(x)=\tau^{a\cdot\alpha-m}a_\alpha(x),\alpha\leqslant k$$

即 $a_\alpha(x)$,$\alpha\leqslant k$,是 $a\cdot\alpha-m$ 次拟齐次的,由命题 6.4 有

$$a_\alpha(x)=\sum_{a\cdot\beta=a\cdot\alpha-m}a_{\beta,\alpha}x^\beta=\sum_{a\cdot\alpha-a\cdot\beta=m}a_{\beta,\alpha}x^\beta,\quad \alpha\leqslant k$$

即必要性成立. 证毕.

**注 6.5**　定理6.3的一个直接推论为：如果$P(x,\partial)$是$m$次拟齐性的，则其转置算子 $P^t(x,\partial)$ 关于同一个伸缩也是 $m$ 次拟齐性的.

事实上，$\forall f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，

$$
\begin{aligned}
&\langle P^t\ (f \circ \delta_r(x)),\varphi\rangle = \\
&\quad \langle f \circ \delta_r(x), P[\varphi]\rangle = \\
&\quad r^{-|a|} \langle f, P[\varphi] \circ \delta_{\frac{1}{r}}(x)\rangle \\
&(P[\varphi \circ \delta_{\frac{1}{r}}(x)] = r^{-m} P[\varphi] \circ \delta_{\frac{1}{r}}(x)) = \\
&\quad r^{m-|a|} \langle f, P[\varphi \circ \delta_{\frac{1}{r}}(x)]\rangle = \\
&\quad r^{m-|a|} \langle P^t[f], \varphi \circ \delta_{\frac{1}{r}}(x)\rangle = \\
&\quad r^m \langle P^t[f] \circ \delta_r(x), \varphi\rangle
\end{aligned}
$$

**定理 6.4**　$P(x,\partial)$是$\mathbf{R}^n$上$m$次拟齐性的 LPDO 当且仅当$P$与$L$的 Lie 括号(也称为换位算子) 满足

$$[P,L] = PL - LP = mP \tag{6.11}$$

**注 6.6**　取$P = L$，则$[L,L] = 0 = 0 \cdot L$，故算子$L$为零次拟齐性的.

**证明**　必要性：由假设有$P[f \circ \delta_\tau(x)] = \tau^m P[f] \circ \delta_\tau(x)$，用$\tau \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$作用于上式等号两边，有

$$左边 = P\left[\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f \circ \delta_\tau)\right] = P[L[f] \circ \delta_\tau]$$

$$
\begin{aligned}
右边 &= m\tau^m P[f] \circ \delta_\tau + \tau^m \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[P[f] \circ \delta_\tau] = \\
&\quad m\tau^m P[f] \circ \delta_\tau + \tau^m L[P[f]] \circ \delta_\tau
\end{aligned}
$$

取$\tau = 1$即得证.

对于充分性，采用四种方法来证明.

证法一：根据条件有$PL - LP = mP$. 作用于函数$u \circ \delta_\tau$有

$$PL[u \circ \delta_\tau] - LP[u \circ \delta_\tau] = mP[u \circ \delta_\tau] \tag{6.12}$$

其中 $PL[u\circ\delta_\tau]=P[\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u\circ\delta_\tau)]=\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P[u\circ\delta_\tau]$. 令 $g(x,\tau)=P[u\circ\delta_\tau]$,式(6.12) 化为

$$\tau\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau}-Lg=mg$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\frac{\partial g}{\partial x_j}-\tau\frac{\partial g}{\partial\tau}=-mg \tag{6.13}$$

取 $D_s(x,\tau)=(\delta_s(x),s^{-1}\tau)$,则 $g\circ D_s(x,\tau)=g(\delta_s(x),s^{-1}\tau)$,且

$$s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g\circ D_s(x,\tau))=L[g\circ D_s]-\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(g\circ D_s) \tag{6.14}$$

解常微分方程

$$\begin{cases}s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g\circ D_s)=-m(g\circ D_s)\\ g\circ D_s\Big|_{s=1}=g\end{cases}$$

得 $g\circ D_s=s^{-m}g$. 当 $s=\tau$ 时,$g(\delta_\tau(x),1)=\tau^{-m}g(x,\tau)$,即 $g(x,\tau)=\tau^m g(\delta_\tau(x),1)$. 另外,因为 $g(x,\tau)=P[u\circ\delta_\tau]$,所以 $g(x,1)=P[u]$. 从而可得 $P[u\circ\delta_\tau]=\tau^mP[u]\circ\delta_\tau$.

证法二:令 $g(x,\tau)=P[u\circ\delta_\tau]$,从式(6.12) 得一阶线性偏微分方程

$$\begin{cases}\tau\dfrac{\partial g}{\partial\tau}-L[g]=mg\\ g\Big|_{\tau=1}=P[u]\end{cases}$$

直接计算可知 $g_1=\tau^mP[u]\circ\delta_\tau$ 是上述初值问题的一个解. 而 $g=P[u\circ\delta_\tau]$ 是一个解,由解的唯一性($\tau=1$ 时方程没有奇异性) 知 $g_1=g$,即

$$P[u\circ\delta_\tau]=\tau^mP[u]\circ\delta_\tau$$

证法三:设 $P(x,\partial)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha$,则

$$PL[u] = \sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha L[u]$$

$$LP[u] = L\Big[\sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha u\Big] = \sum_\alpha L[a_\alpha(x)\partial^\alpha u] =$$

$$\sum_\alpha \{L[a_\alpha(x)]\partial^\alpha u + a_\alpha(x)L[\partial^\alpha u]\}$$

因为 $\partial^\alpha$ 是 $a \cdot \alpha = \sum_{j=1}^n a_j\alpha_j$ 次拟齐性的 LPDO，所以

$$\partial^\alpha L - L\partial^\alpha = a \cdot \alpha\partial^\alpha$$

因而

$$PL[u] - LP[u] =$$

$$-\sum_\alpha L[a_\alpha(x)]\partial^\alpha u + \sum_\alpha a_\alpha(x)[\partial^\alpha L - L\partial^\alpha]u =$$

$$-\sum_\alpha L[a_\alpha(x)]\partial^\alpha u + \sum_\alpha a \cdot \alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha u =$$

$$mP[u] = m\sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha u$$

令 $u = e^{\xi \cdot x}$，代入上式等号两边有：

$$\sum_\alpha (-L[a_\alpha(x)] + a \cdot \alpha a_\alpha(x))\xi^\alpha = m\sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

因此

$$-L[a_\alpha(x)] + a \cdot \alpha a_\alpha(x) = ma_\alpha(x)$$

即

$$L[a_\alpha(x)] = (a \cdot \alpha - m)a_\alpha(x)$$

这说明 $a_\alpha(x)$ 是 $a \cdot \alpha - m$ 次拟齐次的 $C^\infty$ 函数，从而是多项式，由命题 6.4 可写成

$$a_\alpha(x) = \sum_{a\cdot\beta - a\cdot\alpha = m} a_{\alpha,\beta}x^\beta$$

其中，$a_{\alpha,\beta}$ 为常数，$\beta \in I_+^n$. 据定理 6.3 知，$P$ 是 $m$ 次拟齐性 LPDO.

证法四：取 $u = e^{\xi \cdot x}$，则

$$[PL - LP][e^{\xi \cdot x}] = mP[e^{\xi \cdot x}]$$

因为

$$Lu = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \xi_j\right) e^{\xi \cdot x} := L(x,\xi) e^{\xi \cdot x}$$

$$P[u] = \left(\sum_{\alpha} a_\alpha(x) \xi^\alpha\right) e^{\xi \cdot x} := P(x,\xi) e^{\xi \cdot x}$$

所以

$$P[L(x,\xi)e^{\xi \cdot x}] - L[P(x,\xi)e^{\xi \cdot x}] = mP(x,\xi)e^{\xi \cdot x} \quad (6.15)$$

由广义 Leibniz 公式，即

$$P(x,\partial)[uv] = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(x,\partial) u \cdot \partial^\alpha v$$

其中 $P^{(\alpha)}(x,\partial) \xlongequal{\text{def}} [\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)]_{\xi \to \partial}$，$\xi \to \partial$ 表示多项式与偏微分算子换位，代入式(6.15) 即得

$$P[e^{\xi \cdot x}] L(x,\xi) + \sum_{j=1}^{n} P^{(j)}(x,\partial_x)[e^{\xi \cdot x}] \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} L(x,\xi) -$$
$$L_x[P(x,\xi)]e^{\xi \cdot x} - P(x,\xi) L[e^{\xi \cdot x}] = mP(x,\xi)e^{\xi \cdot x}$$

或

$$P(x,\xi)L(x,\xi) + \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j \frac{\partial P(x,\xi)}{\partial x_j} - L_x[P(x,\xi)] -$$
$$P(x,\xi)L(x,\xi) = mP(x,\xi)$$

即得

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j \frac{\partial P}{\partial \xi_j} - L_x[P(x,\xi)] = mP(x,\xi)$$

这里记 $L_x = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$，并记 $L_\xi = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j \partial_{\xi_j}$，则上式写成

$$L_\xi[P(x,\xi)] - L_x[P(x,\xi)] = mP(x,\xi) \quad (6.16)$$

令 $D_\tau(x,\xi) = (\delta_\tau(x), \delta_{\frac{1}{\tau}}(\xi))$，则得初值问题

$$\begin{cases} \tau \dfrac{d}{d\tau} P \circ D_\tau(x,\xi) = L_x P \circ D_\tau - L_\xi P \circ D_\tau = -mP \circ D_\tau \\ P \circ D_\tau \Big|_{\tau=1} = P(x,\xi) \end{cases}$$

解之得

$$P \circ D_\tau = \tau^{-m} P(x,\xi)$$

即

$$P(\delta_\tau(x), \delta_{\tau^{-1}}(\xi)) = \tau^{-m} P(x,\xi) \tag{6.17}$$

若设 $P(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$，则从式(6.17)得

$$\sum_\alpha a_\alpha(\delta_\tau(x)) \cdot (\delta_{\tau^{-1}}(\xi))^\alpha = \tau^{-m} \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

即

$$\sum_\alpha a_\alpha(\delta_\tau(x)) \cdot \tau^{-a\cdot\alpha}\xi^\alpha = \tau^{-m} \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

即得

$$a_\alpha(\delta_\tau(x)) = \tau^{a\cdot\alpha - m} a_\alpha(x)$$

由命题 6.4 及定理 6.3，知 $P(x,\xi)$ 为 $m$ 次拟齐性 LPDO. 证毕.

**注 6.7**　上面的数种证明实质上给出拟齐性 LPDO 的 5 个等价表达式：

(1) $L_\xi[P(x,\xi)] - L_x[P(x,\xi)] = mP(x,\xi)$；

(2) $PL - LP = mP$；

(3) $P[u \circ \delta_\tau] = \tau^m P[u] \circ \delta_\tau$；

(4) $P(x,\partial) = \sum_{a\cdot\alpha - a\cdot\beta = m} a_{\alpha,\beta} x^\beta \partial^\alpha$；

(5) $P(\delta_\tau(x), \delta_{\tau^{-1}}(\xi)) = \tau^{-m} P(x,\xi)$；

其中，$P(x,\xi)$ 为 $P(x,\partial)$ 的象征.

## 6.5　拟齐次分布的延拓问题

**定义 6.5**　设 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$，若 $\dot{u} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$\langle \dot{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$$

则称 $\dot{u}$ 是 $u$ 在 $\mathbf{R}$ 上的延拓.

**命题 6.6**　设 $f(x) \in C(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ 是 $\lambda$ 次拟齐次函数，$\lambda >$

$-|a|$,则 $f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上局部可积函数,从而 $f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 $\lambda$ 次拟齐次分布.

**证明** 由 $f(x)$ 是 $\lambda$ 次拟齐次的,故 $f\circ\delta_\tau(x)=\tau^\lambda f(x)$,取 $\tau=\dfrac{1}{r}$,则

$$f(x)=\tau^{-\lambda}f\circ\delta_\tau(x)=r^\lambda f\circ\delta_{\frac{1}{r}}(x)$$

令 $y=\delta_{\frac{1}{r}}(x)$,则

$$r(y)=r\circ\delta_{\frac{1}{r}}(x)=1\Leftrightarrow|y|=1$$

得估计式

$$|f(x)|=r^\lambda|f\circ\delta_{\frac{1}{r}}(x)|\leqslant r^\lambda\sup_{|y|=1}|f(y)|\leqslant Cr^\lambda$$

因此对任意 $b>0$,利用极坐标变换得

$$\int_{r<b}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\int_{r<b}r^\lambda\mathrm{d}x=C\int_0^b\int_{r=1}r^\lambda r^{|a|-1}\omega(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r\leqslant$$

$$C_1\int_0^b r^{\lambda+|a|-1}\mathrm{d}r<+\infty$$

结论得证.

**引理 6.1** 设 $u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 是 $\lambda$ 次拟齐次的,若 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 满足$\int_0^\infty\tau^{|a|+\lambda-1}\phi\circ\delta_\tau(x)\mathrm{d}x=0$,则 $<u,\phi>=0$.

**证明** 因为 $u$ 是 $\lambda$ 次拟齐次的,所以 $Lu=\lambda u$,即

$$\langle Lu,\phi\rangle=\lambda\langle u,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$$

从而

$$\langle u,L^t\varphi-\lambda\varphi\rangle=0$$

要证明结论成立,只要证明对 $\forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$,总存在 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$,使得

$$L^t\varphi-\lambda\varphi=\phi$$

就有

$$\langle u,\phi\rangle=\langle u,L^t\varphi-\lambda\varphi\rangle=0$$

又因为 $L^t\varphi=-L\varphi-|a|\varphi$,所以所求的 $\varphi$ 满足

$$L\varphi+(\lambda+|a|)\varphi=-\phi\Leftrightarrow$$

$$L\varphi\circ\delta_\tau+(\lambda+|a|)\varphi\circ\delta_\tau=-\phi\circ\delta_\tau\Leftrightarrow$$

$$\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\varphi\circ\delta_\tau)+(\lambda+|a|)\varphi\circ\delta_\tau=-\phi\circ\delta_\tau\Leftrightarrow$$

$$\tau^{\lambda+|a|}(\varphi\circ\delta_\tau)'_\tau+(\lambda+|a|)\tau^{\lambda+|a|-1}\varphi\circ\delta_\tau=-\tau^{\lambda+|a|-1}\phi\circ\delta_\tau\Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\tau^{\lambda+|a|}\varphi\circ\delta_\tau]=-\tau^{|a|+\lambda-1}\phi\circ\delta_\tau\Leftrightarrow$$

$$\varphi-t^{\lambda+|a|}\varphi\circ\delta_t=\int_1^t\tau^{\lambda+|a|-1}\phi\circ\delta_\tau\mathrm{d}\tau$$

由此取 $\varphi$ 的形式如下

$$\varphi(x)=-\int_0^1\tau^{\lambda+|a|-1}\phi\circ\delta_\tau\mathrm{d}\tau\tag{6.18}$$

此外,利用 $\int_0^\infty\tau^{\lambda+|a|-1}\varphi\circ\delta_\tau\mathrm{d}\tau=0$ 和式(6.18)得

$$\varphi(x)=\int_1^\infty\tau^{\lambda+|a|-1}\phi\circ\delta_\tau\mathrm{d}\tau$$

由 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$, 取充分大的常数 $C$, 若 $r(x)>C$, 则 $|\delta_\tau(x)|>r(x)>C(\tau>1)$,从而 $\phi\circ\delta_\tau=0$,所以 $\varphi=0(r(x)>C)$.

由 $\phi\in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$,存在足够小的 $\varepsilon>0$,当 $r(x)<\varepsilon$ 时, $|\delta_\tau(x)|\leqslant\tau\varepsilon\leqslant\varepsilon(\tau<1)$,从而 $\phi\circ\delta_\tau=0$,所以 $\varphi=0(r(x)<\varepsilon)$. 这就说明 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$. 证毕.

**引理6.2**　设 $u_j$ 是 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 上的 $\lambda_j$ 次拟齐次分布, $j=1,2,\cdots,k$,并且当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$. 若

$$\sum_{j=1}^k u_j\equiv 0\tag{6.19}$$

则对 $\forall j,u_j\equiv 0$.

**证明**　由 $Lu_j=\lambda_ju_j$,用 $(L)^{(i)}$($L$ 的 $i$ 次幂, $i=0,1,\cdots,k-1$) 作用于式(6.19),依次得:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} u_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0 \\ \cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{k-1} u_j = 0 \end{cases}$$

任取 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$，有

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \langle u_j, \phi \rangle = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle u_j, \phi \rangle = 0 \\ \cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{k-1} \langle u_j, \phi \rangle = 0 \end{cases} \tag{6.20}$$

令 $\langle u_j, \phi \rangle = C_j, j = 1, \cdots, k$，则式(6.20)为关于 $C_j$ 的方程组，其行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

推得 $C_j = 0, j = 1, \cdots, k$，即 $\langle u_j, \phi \rangle = 0$，所以 $u_j \equiv 0, j = 1, \cdots, k$. 证毕.

**引理 6.3** 存在 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R} \backslash \{0\})$ 满足

$$\int_0^\infty \frac{\varphi \circ \delta_t(x)}{t} \mathrm{d}t \equiv 1 \tag{6.21}$$

**证明** 任取 $\varphi_0(s) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$ 满足

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_0(s)}{s} \mathrm{d}s = 1$$

令 $\varphi(x)=\varphi_0(r(x))\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$，则

$$\int_0^\infty \frac{\varphi\circ\delta_t(x)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{\varphi_0(r(\delta_t(x)))}{t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{\varphi_0(tr)}{t}\mathrm{d}t$$

令 $tr=t'$，完成证明. 证毕.

**定理 6.5**　设 $u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 为 $\lambda$ 次拟齐次分布，且

$$\lambda\notin\{-|a|-a\cdot\beta,\beta\in I_+^n\}$$

则 $u$ 有一个延拓 $\dot{u}\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，且

(1) $\dot{u}$ 是 $\lambda$ 次拟齐次的；

(2) 这样的延拓是唯一的.

**证明**　唯一性：若另有 $\dot{u}_1\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 为 $\lambda$ 次拟齐次分布且也是 $u$ 的延拓，则 $\dot{u}_1-\dot{u}\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，且 $\dot{u}_1-\dot{u}\equiv 0$ 在 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 成立，所以 $\mathrm{supp}\{\dot{u}_1-\dot{u}\}=\{0\}$，从而有

$$(\dot{u}_1-\dot{u})-\sum_\alpha C_\alpha\partial^\alpha\delta(x)=0$$

由 $\lambda\notin\{-|a|-a\cdot\beta,\beta\in I_+^n\}$ 及引理 6.2 知 $\dot{u}_1=\dot{u}$.

存在性：取 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 满足 $\int_0^\infty \frac{\varphi\circ\delta_t(x)}{t}\mathrm{d}t=1$，设 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$，令

$$R_\lambda[\phi](x)=\int_0^\infty t^{|a|+\lambda-1}\phi\circ\delta_t(x)\mathrm{d}t\in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})\quad(6.22)$$

是 $x$ 的函数. 可以证明 $R_\lambda[\varphi R_\lambda[\phi]]=R_\lambda[\phi]$. 事实上，

$$\begin{aligned}
&R_\lambda[\varphi R_\lambda[\phi]](x)=\\
&\quad\int_0^\infty t^{|a|+\lambda-1}(\varphi R_\lambda[\phi])\circ\delta_t(x)\mathrm{d}t=\\
&\quad\int_0^\infty t^{|a|+\lambda-1}(\varphi\circ\delta_t(x))\cdot(R_\lambda[\phi]\circ\delta_t(x))\mathrm{d}t=\\
&\quad\int_0^\infty t^{|a|+\lambda-1}(\varphi\circ\delta_t(x))\cdot[t^{-|a|-\lambda}R_\lambda[\phi]](x)\mathrm{d}t=\\
&\quad R_\lambda[\phi](x)\int_0^\infty\frac{\varphi\circ\delta_t(x)}{t}\mathrm{d}t=R_\lambda[\phi](x)
\end{aligned}$$

所以

$$R_\lambda[\phi R_\lambda[\phi]-\phi]=0$$

即

$$\int_0^\infty \tau^{|\alpha|+\lambda-1}[\varphi R_\lambda[\phi]-\phi]\circ\delta_\tau(x)\mathrm{d}\tau=0$$

由引理 6.1 得 $\langle u,[\varphi R_\lambda[\phi]-\phi]\rangle=0$，即

$$\langle u,\phi\rangle=\langle u,\varphi R_\lambda[\phi]\rangle,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})\tag{6.23}$$

现在若 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，则 $\varphi R_\lambda[\phi]\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$，由此可以定义 $\dot{u}$ 如下：

$$\langle\dot{u},\phi\rangle=\langle u,\varphi R_\lambda[\phi]\rangle,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\tag{6.24}$$

由式(6.23)可知 $\dot{u}$ 为 $u$ 的延拓，下面证明其拟齐性，即证

$$\langle\dot{u},\tau^{-|\alpha|}\phi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle=\tau^\lambda\langle\dot{u},\phi\rangle,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

事实上，任取 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}&\langle\dot{u},\tau^{-|\alpha|}\phi\circ\delta_{\tau^{-1}}\rangle=\\&\langle u,\varphi R_\lambda[\tau^{-|\alpha|}\phi\circ\delta_{\tau^{-1}}]\rangle=\\&\int_{\mathbf{R}^n}u\varphi\int_0^\infty t^{|\alpha|+\lambda-1}\tau^{-|\alpha|}\phi\circ\delta_{\tau^{-1}}\circ\delta_t(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\\&\tau^\lambda\int_{\mathbf{R}^n}u\varphi\int_0^\infty t^{|\alpha|+\lambda-1}\phi\circ\delta_t(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\\&\tau^\lambda\langle u,\varphi R_\lambda[\phi]\rangle=\tau^\lambda\langle\dot{u},\phi\rangle\end{aligned}$$

证毕.

**注 6.8** 积分 $R_\lambda[\phi](x)=\int_0^\infty t^{|\alpha|+\lambda-1}\phi\circ\delta_t(x)\mathrm{d}t$ 是有意义的. 事实上，固定 $x$，当 $t\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}t^{|\alpha|+\lambda-1}\phi\circ\delta_t(x)=\\&\lim_{t\to 0}t^{|\alpha|+\lambda-1}\circ\lim_{t\to 0}\phi\circ\delta_t(x)=\\&C\lim_{t\to 0}t^{|\alpha|+\lambda-1}\end{aligned}$$

当 $|\alpha|+\lambda>0$ 时积分收敛. 当 $\mathrm{Re}\lambda+|\alpha|\leqslant 0$ 时，以上积分在通常意义下将会无意义.

下面以一元齐次函数为例：令 $I_\lambda[\phi] = \int_0^\infty t^\lambda \phi(t)\mathrm{d}t$，$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}\backslash\{0\})$，$\lambda \in \mathbf{C}$，$\mathrm{supp}\phi \subset (a,b)(a>0)$，定义

$$t_+^\lambda = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t^\lambda, & t > 0 \end{cases}$$

以及

$$\langle t_+^\lambda, \phi \rangle = I_\lambda[\phi] = \int_0^\infty t^\lambda \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}\backslash\{0\}) \tag{6.25}$$

如何将 $t_+^\lambda \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}\backslash\{0\})$ 延拓到 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ 上呢？

情形一：$\mathrm{Re}\lambda > -1$.

对任意 $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$，定义延拓

$$\langle (t_+^\lambda)^\cdot, \phi \rangle = \int_0^\infty \tau^\lambda \phi(\tau)\mathrm{d}\tau := I_\lambda[\phi] \tag{6.26}$$

它是收敛的连续泛涵. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} I_\lambda[\phi] = \int_0^\infty (\ln\tau)\tau^\lambda \phi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

在 $\mathrm{Re}\lambda > -1$ 时仍是收敛的，从而 $I_\lambda(\phi)$ 在 $\mathrm{Re}\lambda > -1$ 上解析（下面作解析延拓）.

情形二：$\mathrm{Re}\lambda \neq$ 负整数.

利用分部积分，

$$I_\lambda[\phi] = \int_0^\infty \phi(\tau)\mathrm{d}\left(\frac{\tau^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right) =$$

$$\frac{-1}{\lambda+1}\int_0^\infty \tau^{\lambda+1}\phi'(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{-1}{\lambda+1} I_{\lambda+1}[\phi'] =$$

$$\frac{(-1)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} I_{\lambda+2}[\phi''] = \cdots =$$

$$\frac{(-1)^k}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+k)} I_{\lambda+k}[\phi^{(k)}]$$

此时要求 $\mathrm{Re}\lambda + k > -1$ 和 $\mathrm{Re}\lambda \neq$ 负整数，积分均有意义.

取正整数 $k$，使 $k > -\mathrm{Re}\lambda - 1$，可定义延拓为

$$\langle (t_+^\lambda)^\cdot, \phi \rangle = \frac{(-1)^k}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+k)}\int_0^\infty t^{\lambda+k}\phi^{(k)}(t)\mathrm{d}t := \frac{(-1)^k}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+k)} I_{\lambda+k}[\phi^{(k)}] \tag{6.27}$$

情形三：$\lambda = -k$，$k$ 为正整数.

取复数 $\varepsilon \neq 0(|\varepsilon| < 1)$，考虑

$$I_{k+\varepsilon}(\phi) := I_\varepsilon(\phi^{(k)}) = \frac{(-1)^k}{\varepsilon(\varepsilon-1)\cdots(\varepsilon-k+1)}\int_0^\infty t^\varepsilon \phi^{(k)}(t)\mathrm{d}t = \frac{C_{-1}}{\varepsilon} + C_0 + O(\varepsilon)$$

其中

$$C_{-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon I_{k+\varepsilon} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \phi^{(k)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k-1)!}\phi^{(k-1)}(0)$$

$$C_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{(-1)^k}{(\varepsilon-1)\cdots(\varepsilon-k+1)}\displaystyle\int_0^\infty t^\varepsilon\phi^{(k)}\mathrm{d}t - \dfrac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}}{\varepsilon} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \ln\frac{1}{t}\phi^{(k)}\mathrm{d}t + \frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1}\dfrac{1}{j}}{(k-1)!}\phi^{(k-1)}(0)$$

因为$\dfrac{C_{-1}}{\varepsilon}$，$O(\varepsilon)$ 与 $\varepsilon$ 有关，不稳定，所以定义

$$\langle t_+^\lambda, \phi \rangle = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \ln\frac{1}{t}\phi^{(k)}\mathrm{d}t + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \ln\frac{1}{t}\phi^{(k)}\mathrm{d}t + (-1)^{(k-1)}\delta^{(k-1)}(\phi) \tag{6.28}$$

对于拟齐次函数，可以类似作延拓，方法如下：

当 $\lambda \neq -(|a| + a\cdot\alpha)(\alpha \in I_+^n)$，且 $\mathrm{Re}\lambda + |a| > 0$ 时，

$$R_\lambda[\phi] = \int_0^\infty t^{\lambda+|a|-1}\phi \circ \delta_t(x)\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^\infty \phi \circ \delta_t(x)\mathrm{d}\,\frac{t^{\lambda+|a|}}{\lambda+|a|} = \frac{-1}{\lambda+|a|}\int_0^\infty t^{\lambda+|a|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \delta_t(x))\mathrm{d}t$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t^{a_1}x_1, t^{a_2}x_2, \cdots, t^{a_n}x_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \circ \delta_t(x) \cdot a_j x_j t^{a_j-1}$$

将其代入上式得

$$R_\lambda[\phi] = \frac{-1}{\lambda+|a|}\sum_{j=1}^n a_j x_j \int_0^\infty t^{\lambda+|a|+a_j-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \circ \delta_t(x)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{(-1)^k}{(\lambda+|a|)(\lambda+|a|+m_1)\cdots(\lambda+|a|+m_k)} \cdot$$

$$\int_0^\infty C_k(x) t^{\lambda+|a|+m_k}\partial^\alpha \phi \circ \delta_t(x)\mathrm{d}t$$

其中 $m_j = \sum_{a\cdot\alpha=j} a \cdot \alpha - 1$，$|\alpha| = k$. 可见 $R_\lambda[\phi]$ 的定义是有意义的. 进一步有如下定理.

**定理 6.6**　设 $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$，且在 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 上是 $\lambda$ 次拟齐次的. 若 $\lambda = -(|a| + a \cdot \alpha)$，则 $u$ 可以延拓为 $\mathbf{R}^n$ 上的 $\lambda$ 次拟齐次分布的必要充分条件为：对每一个满足 $a \cdot \beta = -\lambda - |a|$ 的 $\beta \in I_+^n$，有

$$\int_{|x|=1} u(x) x^\beta \mathrm{d}\sigma = 0 \quad (\mathrm{d}\sigma\text{ 为第一类曲面积分}) \tag{6.29}$$

并且当式(6.29)成立时，延拓 $\dot{u}$ 不唯一，可以相差项

$$\sum_{a\cdot\alpha=\lambda-|a|} C_\alpha \partial^\alpha \delta(x)$$

当 $n = 1$ 时，充要条件为 $\lambda = -|a|$，$\int_{|x|=1} u(x)\mathrm{d}\sigma = 0$.

下列问题请有兴趣的读者思考：设 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ 为 $\lambda$ 次拟齐次的，$u$ 是否可延拓为 $\dot{u} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$LL\dot{u} = \lambda^2 \dot{u}, \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$$

## 6.6 拟齐性偏微分算子的谱性质

下面将给出拟齐性 LPDO 在 $L^2$ 上的某些重要的谱性质. 特别地,证明了任何一个自伴的 $m$ 阶($m \neq 0$) 拟齐性 LPDO 没有非零特征值.

以下恒设 $P$ 为关于$\{\delta_r\}_{r>0}$ 的 $m$ 阶拟齐性 LPDO,其系数属于 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

记 $V_0$ 为 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 按范数 $|u|_{V_0} = (\| u \|^2 + \| Pu \|^2)^{\frac{1}{2}}$ 的完备化,这里 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 范数. 于是可将 $P$ 视为以 $V_0$ 为定义域的 $L^2$ 上的无界算子,仍以 $P$ 记之. 易知 $P$ 是在 $L^2$ 中稠定的闭算子,从而可考虑 $P$ 的谱性质.

记 $P$ 的正则点集为 $\rho(P)$,$P$ 的谱集为 $\sigma(P)$(Hilbert 空间上无界算子的谱、正则点等基本概念可参阅参考文献[47]).

对于 $r > 0$,定义 $L^2$ 上的一族酉算子 $\dot{D}_r$:

$$\dot{D}_r u(x) = r^{\frac{\sigma}{2}} u(\delta_r(x)), \quad \forall u \in L^2(\mathbf{R}^n) \tag{6.30}$$

其中,$\sigma = \sum_{j=1}^{n} a_j$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上关于$\{\delta_r\}_{r>0}$ 的齐次维数. 事实上,

$$\| \dot{D}_r u \|_{L^2} = \left[ \int_{\mathbf{R}^n} r^\sigma \mid u(\delta_r(x)) \mid^2 \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}}$$

令 $y = \delta_r(x)$,则 $\mathrm{d}x = r^{-\sigma}\mathrm{d}y$,且

$$\| \dot{D}_r u \|_{L^2} = \left( \int_{\mathbf{R}^n} \mid u(y) \mid^2 \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} = \| u \|_{L^2}$$

**引理 6.4** $\dot{D}_r$ 是 $V_0 \to V_0$ 的同胚映射.

**证明** 设 $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 由 $P$ 的齐次性,

$$P\dot{D}_r u = r^{\frac{\sigma}{2}} r^m (Pu) \circ \delta_r = r^m \dot{D}_r Pu$$

再由 $\dot{D}_r$ 的保范性,有

$$|\dot{D}_r u|_{V_0} = (\|\dot{D}_r u\|^2 + \|P\dot{D}_r u\|^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$(\|u\|^2 + r^{2m}\|\dot{D}_r P u\|^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$(\|u\|^2 + r^{2m}\|Pu\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

令 $C(r) = \max(1, r^{2m})$，则有

$$|\dot{D}_r u|_{V_0} \leqslant C(r)|u|_{V_0} \tag{6.31}$$

同理可知

$$|u|_{V_0} = |\dot{D}_{\frac{1}{r}}\dot{D}_r u|_{V_0} \leqslant C\left(\frac{1}{r}\right)|\dot{D}_r u|_{V_0} \tag{6.32}$$

由于 $C_0^\infty$ 在 $V_0$ 中稠密，故式(6.31)、式(6.32) 对 $u \in V_0$ 仍成立. 证毕.

**命题 6.7** 设 $P$ 是具 $C^\infty$ 系数的 $m$ 阶拟齐性 LPDO 且 $m \neq 0$，则 $\rho(P)$ 是复平面上的开锥集.

**证明** 由经典结果知 $\rho(P)$ 必为开集. 为证其锥性质，设 $\lambda \in \rho(P)$ 且不妨设 $\lambda \neq 0$. 则 $\lambda I - P$ 是 $V_0 \to L^2$ 之双射，且其逆有界，由引理 6.4 知算子 $r^{-m}\dot{D}_r^{-1}(\lambda I - P)\dot{D}_r$ 亦然. 注意到 $\dot{D}_r^{-1} = \dot{D}_{\frac{1}{r}}$ 以及 $P\dot{D}_r = r^m\dot{D}_r P$，知 $r^{-m}\dot{D}_r^{-1}(\lambda I - P)\dot{D}_r = r^{-m}\lambda I - P$. 对任何 $\tau > 0$，令 $r = \tau^{-\frac{1}{m}}$，则由上可知 $\tau\lambda \in \rho(P)$. 故 $\rho(P)$ 确为锥集. 证毕.

**推论 6.2** 设 $P$ 如命题 6.7 所设，则当且仅当 $0 \in \sigma(P)$ 时，$\sigma(P)$ 非空.

**命题 6.8** 设 $P$ 如命题 6.7 所述，则 $\sigma(P)$ 为非空闭锥集.

**证明** 只须证明 0 不是 $P$ 的正则点. 若否，则 $P$ 是 $V_0 \to L^2$ 的双射且其逆有界，故存在 $C > 0$，使下式成立

$$\|Pu\| \geqslant C\|u\|, \forall u \in V_0 \tag{6.33}$$

由引理 6.4 知，换 $u$ 为 $\dot{D}_r u$，式(6.33) 成立，从而得到

$$r^m\|Pu\| \geqslant C\|u\|, \quad \forall r > 0, \forall u \in V_0 \tag{6.34}$$

当 $m > 0$ 时，令 $r \to 0$；当 $m < 0$ 时，令 $r \to \infty$，则从式(6.34) 可得

$C=0$,矛盾.故 $0\in\sigma(P)$.注意到推论6.2及命题6.7,知 $\sigma(P)$ 为非空的闭锥集.证毕.

**定理 6.7** 设 $P$ 为具有光滑系数的 $m$ 阶拟齐性 LPDO,$m\neq 0$,且 $P$ 是自伴的,则 $P$ 没有非零特征值.

**证明** 若否,设 $\lambda\neq 0$ 为 $P$ 的特征值,$u$ 为对应于 $\lambda$ 的特征函数,不妨设 $\|u\|=1$,则 $u$ 满足

$$Pu=\lambda u,\ \|u\|=1,u\in V_0 \tag{6.35}$$

$\forall r>0$,令 $\tau=r^{\frac{1}{m}}$,$u_r=\dot{D}_\tau u$,则由 $\dot{D}_r$ 的性质及式(6.35)可知 $\|u_r\|=\|u\|=1$ 且有 $u_r\in V_0$ 以及 $Pu_r=P\dot{D}_\tau u=\tau^m\dot{D}_\tau Pu=r\lambda\dot{D}_\tau u=r\lambda u_r$.

这表明 $u_r$ 是对应于特征值 $r\lambda$ 的特征函数.由于 $P$ 是自伴的,故当 $r>0$ 且 $r\neq 1$ 时,$u_r$ 同 $u$ 正交(按 $L^2$ 中内积).

令 $f(r)=(u_r,u)_{L^2}$.注意到 $u_1=u$,则有

$$f(r)=\begin{cases}0, & r\neq 1,r>0\\ 1, & r=1\end{cases}$$

上式表明 $f(r)$ 在 $r=1$ 发生间断.

另外,又可从 $f(r)$ 的原始定义推出 $f$ 在 $(0,\infty)$ 中连续,从而得出矛盾.事实上,取 $u^{(j)}\in C_0^\infty$,使 $u^{(j)}\to u$ 在 $V_0$ 中,当 $j\to\infty$.

令 $u_r^{(j)}=\dot{D}_r u^{(j)}$,再令 $f_j(r)=(u_r^{(j)},u)_{L^2}$,$j=1,2,\cdots$.

首先,证明 $f_j$ 在 $(0,\infty)$ 中连续.注意到 $f_j(r)=r^{\frac{g}{2}+\sigma j}\int u^{(j)}(\delta_r(x))\overline{u(x)}\mathrm{d}x$,令 $g_j(r)=\int u^{(j)}(\delta_r(x))\overline{u(x)}\mathrm{d}x$.故只须证明 $g_j(r)$ 连续.为此,任取 $r_0\in(0,\infty)$,有(当 $j$ 固定):

$$|g_j(r)-g_j(r_0)|\leqslant\|u\|\ \|u^{(j)}(\delta_r(x))-u^{(j)}(\delta_{r_0}(x))\| \tag{6.36}$$

由于 $u^{(j)}\in C_0^\infty$,且 $\sup_{k_j}|\delta_r(x)-\delta_{r_0}(x)|\to 0$ 当 $r\to r_0$(其中 $k_j=\mathrm{supp}u^{(j)}$),故由式(6.36)得 $|g_j(r)-g_j(r_0)|\to 0$,当 $r\to r_0$,故 $g_j$(从而 $f_j$)连续.

其次，证明当 $j \to \infty$ 时，$f_j(r)$ 在 $(0,\infty)$ 中一致收敛于 $f(r)$. 事实上，有

$$
\begin{aligned}
| f_j(r) - f(r) | = | (u_r^{(j)} - u_r, u)_{L^2} | \leqslant \\
\| u \| \, \| u_r^{(j)} - u_r \| = \| u \| \, \| \dot{D}_r(u^{(j)} - u) \| = \\
\| u \| \, \| u_j - u \| \to 0
\end{aligned}
$$

于是，由 $C(0,\infty)$ 在一致收敛的拓扑下的完备性知 $f \in C(0,\infty)$，特别地，$f$ 在 $r = 1$ 连续. 证毕.

**注 6.9**　定理6.7表明拟齐性LPDO作为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的无界算子，或者有唯一的特征值 0，或者没有特征值. 而在第二种情形，据命题6.8知0必定是 $P$ 的连续谱或残谱. 第二种情形的典型例子是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Laplace 算子(利用 Fourier 变换易知 0 不是特征值)，但第一种情形同样可能发生. 请看下面的例子：

**例 6.8**　令 $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}, Y = \dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{1}{2}x\dfrac{\partial}{\partial t}, x, y, t \in \mathbf{R}$. 又令

$$
\begin{aligned}
P = -(X^2 + Y^2) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} = \\
-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{x^2 + y^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

易知 $P$ 关于 $\delta_r(t,x,y) = (r^2 t, rx, ry)$ 是 2 阶拟齐性 LPDO.

直接验证可知，形如 $f\left(\dfrac{1}{4}(x^2 + y^2) - \mathrm{i}t\right)$ 的函数均满足 $Pf = 0$. 特别地取 $u = \left(1 + \left|\dfrac{x^2 + y^2}{4} - \mathrm{i}t\right|^4\right)^{-1}$. 则 $u \in L^2(\mathbf{R}^3)$，且 $Pu = 0$. 由此可见 $P$ 具有特征值 0.

下面叙述齐次群上的齐性 LPDO 的谱性质，有关齐次群的概念可参阅参考文献[21].

**定理 6.8**　设 $P$ 是齐次群 $G$ 上的 $m$ 阶自伴拟齐性 LPDO. 若 $m \neq 0$，且 $P$ 是左(右)平移不变的亚椭圆算子，则 $P$ 作为 $L^2(G)$ 上的算子无特征值.

**证明**　据定理 6.7 知，只须证明 0 不是 $P$ 的特征值，为此，用反证法. 若 $f$ 是 $P$ 对应于特征值 0 的特征函数，则 $\| f \| \neq 0$，且 $Pf = 0$.

令

$$F(x) = \int_1^{\infty} r^{1-\frac{\sigma}{2}} \dot{D}_r f(x) \mathrm{d}r, \quad x \in G \qquad (6.37)$$

其中 $\sigma$ 为齐次群上的齐次维数. 由 Minkowski 不等式及 Fubini 定理知

$$\| F \| \leqslant \int_1^{\infty} r^{1-\frac{\sigma}{2}} \| \dot{D}_r f \| \mathrm{d}r = \int_1^{\infty} r^{1-\frac{\sigma}{2}} \mathrm{d}r \| f \| = \frac{2}{\sigma} \| f \|$$

故 $F \in L^2(G)$. 下面进而证明 $PF = 0$. 事实上，对于 $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$，有

$$\begin{aligned}
(PF, \varphi) = (F, P^t\varphi) = \left( \int_1^{\infty} r^{-1\ \frac{\sigma}{2}} \dot{D}_r f \mathrm{d}r, P^t\varphi \right) = \\
\int_1^{\infty} r^{-1\ \frac{\sigma}{2}} (\dot{D}_r f, P^t\varphi) \mathrm{d}r = \\
\int_1^{\infty} r^{1-\frac{\sigma}{2}} (P\dot{D}_r f, \varphi) \mathrm{d}r = \\
\int_1^{\infty} r^{1-\frac{\sigma}{2}+m} (\dot{D}_r P f, \varphi) \mathrm{d}r = \\
\int_1^{\infty} r^{1\ \frac{\sigma}{2}+m} (Pf, \dot{D}_{\frac{1}{r}} \varphi) \mathrm{d}r = 0
\end{aligned}$$

由 $\varphi$ 的任意性知 $PF = 0$. 注意到 $P$ 的亚椭圆性假定，知 $F \in C^{\infty}(G)$，因此 $f \in C^{\infty}(G)$. 特别是 $F$ 在 $G$ 的单位元 $e$ 处应连续. 故由式(6.37) 及 $\dot{D}_r$ 的定义知 $F(e) = \int_1^{\infty} \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot f(e)$，从而必有 $f(e) = 0$. 现在令 $f_y(x) = f(yx)$，$\forall\, y \in G, x \in G$，则 $\| f_y \| = \| f \|$ 且由 $P$ 的左平移不变性知 $Pf_y = 0$，根据刚才的推导，应有 $f_y(e) = 0$，从而 $f(y) = f(ye) = f_y(e) = 0$，即 $f(y) = 0$，$\forall\, y \in G$. 这和 $\| f \| \neq 0$ 矛盾. 证毕.

# 第七章　拟齐性亚椭圆 LPDO

本章 7.1 节介绍拟齐性线性偏微分算子(LPDO) 的亚椭圆性的一个充要条件;7.2 节介绍拟齐性 LPDO 的基本解的性质;7.3 节介绍奇性可去定理.

## 7.1　基本概念

**定义 7.1**　设分布 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$,开集 $\omega \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$,若存在 $f \in C^\infty(\omega)$,使

$$\langle u,\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\omega)$$

则称 $u$ 在 $\omega$ 中为 $C^\infty$ 的.

**定义 7.2**　设 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$,$x_0 \in \Omega$,如果 $u$ 在 $x_0$ 的任何领域中都不是 $C^\infty$ 的,称 $x_0$ 是 $u$ 的奇点. $u$ 的所有奇点的闭包称为 $u$ 的奇支集,记为 SingSupp(Singular Support)$u$ 或 S. S. $u$. 易见 S. S. $u \subset \mathrm{supp}\, u$.

**定义 7.3**　设 $P(x,\partial)$ 是定义在 $\Omega$ 上的 LPDO,若 $\forall u \in \mathscr{D}'(\Omega)$,S. S. $P[u]$ = S. S. $u$,则称 $P(x,\partial)$ 在 $\Omega$ 上是亚椭圆的(Hypoelliptic).

**性质 7.1**　$P(x,\partial)$ 在 $\Omega$ 上亚椭圆 $\Leftrightarrow \forall u \in \mathscr{D}'(\Omega), \forall \omega \subset \Omega$, $\exists \omega' \subset \Omega$,如果 $P[u] \in C^\infty(\omega)$,那么 $u \in C^\infty(\omega')$.

**证明**　"$\Rightarrow$"反证法. 若存在 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$,$\omega \subset \Omega$,使 $P[u] \in C^\infty(\omega)$,但不存在 $\omega' \subset \Omega$,使得 $u \in C^\infty(\omega')$,即 $\forall \omega' \subset \Omega, u \notin C^\infty(\omega')$. 于是 S. S. $u = \Omega$,从而 S. S. $P[u] = \Omega$,这与存在 $\omega \subset \Omega$,

使 $P[u] \in C^\infty$ 矛盾.

"$\Leftarrow$"显然 S. S. $u \subset$ S. S. $P[u]$. 只须证 S. S. $P[u] \subset$ S. S. $u$. 若 $x \notin$ S. S. $u$，则存在 $B(x,\delta) \subset \Omega$，使 $u \in C^\infty(B(x,\delta))$. 于是 $P[u] \in C^\infty(B(x,\delta))$，即 $x \notin$ S. S. $P[u]$. 因而 S. S. $P[u] \subset$ S. S. $u$，得证.

**例 7.1** Laplace 算子 $\Delta$ 是亚椭圆的.

**例 7.2** $\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 是亚椭圆的.

**例 7.3** $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 不是亚椭圆的. 如任取 $f \in C^1 \backslash C^2$，则 $f(x+y)$ 满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

**定理 7.1** 设 $P(x,\partial)$ 是 $m$ 次拟齐性 LPDO，若 $P$ 在 $x=0$ 的某领域内是亚椭圆的，则 $m \geqslant 0$.

**证明** 利用欧氏空间上的 Fourier 变换，则有

$$
\begin{aligned}
(P_{(x,\partial)}u)^\wedge = & \sum_{a\cdot\beta - a\cdot\alpha = m} a_{\alpha,\beta}(x^\alpha\partial^\beta u)^\wedge = \\
& \sum_{a\cdot\beta - a\cdot\alpha = m} a_{\alpha,\beta}\mathrm{i}^{|\alpha|+|\beta|}\partial_\xi^\alpha(\xi^\beta\hat{u}(\xi)) = \\
& Q(\xi,\partial_\xi)\hat{u}(\xi),
\end{aligned}
$$

易知 $Q(\xi,\partial_\xi)$ 是 $-m$ 次拟齐性 LPDO. 事实上，记 $v(\xi) = \hat{u}(\xi)$，则

$$
\begin{aligned}
Q(\xi,\partial_\xi)v \circ \delta_\tau(\xi) = & \\
& \sum_{a\cdot\beta - a\cdot\alpha = m} a_{\alpha,\beta}\mathrm{i}^{|\alpha|+|\beta|}\partial_\xi^\alpha(\xi^\beta v(\delta_\tau(\xi))) = \\
& \tau^{a\cdot\alpha}\sum_{a\cdot\beta - a\cdot\alpha = m}\partial_{\delta_\tau(\xi)}^\alpha(\tau^{a\cdot\beta}\delta_\tau^\beta(\xi)v(\delta_\tau(\xi))) = \\
& \tau^{-m}[Q(\xi,\partial_\xi)v] \circ \delta_\tau(\xi)
\end{aligned}
$$

假设 $m < 0$，则 $-m > 0$，取 $\hat{u}_0(\xi) \equiv 1$，则 $Q(\xi,\partial_\xi)1 \equiv 0$，即

$$
P[u_0] = P[\check{1}] \equiv 0
$$

其中 $\check{1} = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\delta(x)$ 是 1 的 Fourier 逆变换，从而

$$P\left[\frac{\delta(x)}{(2\pi)^n}\right]=0$$

与亚椭圆性产生矛盾. 从而 $m \geqslant 0$. 证毕.

说明：该定理可用来判断某些 LPDO 不是亚椭圆的. 例如，算子

$$x^2\frac{\partial}{\partial x}-y^3\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

为 $-1$ 次拟齐性 LPDO. 事实上，取 $\delta_\tau(x,y)=(\tau x,\tau y)$，则

$$\left(x^2\frac{\partial}{\partial x}-y^3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u\circ\delta_\tau(x,y)=$$

$$\tau x^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\circ\delta_\tau(x,y)-\tau^2y^3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\circ\delta_\tau(x,y)=$$

$$\tau^{\ 1}\left[x^2\frac{\partial u}{\partial x}-y^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\circ\delta_\tau(x,y)$$

故算子为 $-1$ 次拟齐性的. 因而由定理 7.1 知算子不是亚椭圆的.

## 7.2　基 本 解

设 $E\in\mathscr{D}'(\Omega)$，若在 $\Omega$ 中 $P[E]=\delta(x)$，则称 $E$ 为 $P$ 在 $\Omega$ 中的基本解.

说明：基本解若存在，则不一定是唯一的，可以相差任一常数. 初值及边值问题的解通常可由基本解表示.

**例 7.4**　对 $\mathbf{R}^n$ 上 Laplace 算子 $\Delta$，有 $m=2$，$|a|=n$，并且

$$E(x)=\begin{cases}r^{2\ n}, & n>2\\ \ln r^{-1}, & n=2\end{cases}$$

**定理 7.2**　设 $P(x,\partial)$ 是 $m$ 次拟齐性亚椭圆 LPDO，若 $E(x)$ 是 $P$ 在 $x=0$ 的某邻域 $\omega_b=\{x: r(x)<b\}$ 上的基本解，则

$$E(x)=E^*(x)+q(x)\ln\frac{1}{r(x)}+W(x) \tag{7.1}$$

其中 $E^*(x)$ 是 $m-|a|$ 次拟齐次函数，$E^* \in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$；$q(x)$ 是 $m-|a|$ 次多项式，且当 $m<|a|$ 或 $m\neq |a|+a\cdot\beta,\beta\in I_+^n$ 时，恒为零；$W\in C^\infty(\omega_{b'})(b'<b)$，且 $P[W]\equiv 0$.

**证明**　第一步：证明

$$P[(L-m+|a|)E(x)]=0 \tag{7.2}$$

由 $P$ 是 $m$ 次拟齐性 LPDO 及 $\delta(x)$ 是 $-|a|$ 次拟齐次分布，有

$$PL[E(x)]=[LP+mP]E(x)=L[\delta(x)]+m\delta(x)=$$

$$(m-|a|)\delta(x)=(m-|a|)P[E(x)]$$

这里用到 $L\delta=-|a|\delta$，因而 $P[(L-m+|a|)E(x)]=0$.

第二步：由式(7.2)及 $P$ 的亚椭圆性知

$$[L-(m-|a|)]E(x)\xlongequal{\text{def}}V(x)\in C^\infty(\omega_{b'}),\quad b'<b$$

由此可求出 $E(x)$ 的表达式. 事实上，将 $x$ 换为 $\delta_\tau(x)$，得

$$[L-(m-|a|)]E\circ\delta_\tau(x)=V\circ\delta_\tau(x)$$

即

$$\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E\circ\delta_\tau(x)+(|a|-m)E\circ\delta_\tau=V\circ\delta_\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\tau^{|a|-m}E\circ\delta_\tau(x)]=\tau^{|a|-m-1}V\circ\delta_\tau(x)$$

关于 $\tau$ 从 $t$ 到 1 积分，得

$$\int_t^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tau^{|a|-m}E\circ\delta_\tau(x))\mathrm{d}\tau=\int_t^1\tau^{|a|-m-1}V\circ\delta_\tau(x)\mathrm{d}\tau$$

即

$$E(x)=t^{|a|-m}E\circ\delta_t(x)+\int_t^1\tau^{|a|-m-1}V\circ\delta_\tau(x)\mathrm{d}\tau \tag{7.3}$$

第三步：考虑当 $t\to 0$ 时，式(7.3)等号右边第二项的极限.

情形一：$|a|-m>0$. 则当 $t\to 0$ 时，

$$\int_t^1\tau^{|a|-m-1}V\circ\delta_\tau(x)\mathrm{d}\tau\to\int_0^1\tau^{|a|-m-1}V\circ\delta_\tau\mathrm{d}\tau$$

且记

$$W(x) := \int_0^1 \tau^{|\alpha|-m-1} V \circ \delta_\tau(x) \mathrm{d}\tau \in C^\infty(\omega_{b'})$$

由式(7.3) 设

$$t^{|\alpha|-m} E \circ \delta_t \xrightarrow{t \to 0} E_1(x) \in \mathscr{D}'(\omega_{b'})$$

在广义函数意义下成立(即利用广义函数中的极限定义)，故

$$E(x) = E_1(x) + W(x) \tag{7.4}$$

对 $0 < \lambda < 1$，

$$\begin{aligned} E_1 \circ \delta_\lambda(x) &= \lim_{t \to 0} t^{|\alpha|-m} E \circ \delta_\lambda \circ \delta_t(x) = \\ &\lim_{t \to 0} \lambda^{m-|\alpha|} (\lambda t)^{|\alpha|-m} E \circ \delta_{\lambda t}(x) = \\ &\lambda^{m-|\alpha|} \lim_{s \to 0} s^{|\alpha|-m} E \circ \delta_s(x) = \\ &\lambda^{m-|\alpha|} E_1(x) \end{aligned} \tag{7.5}$$

这表明 $E_1$ 是 $m-|\alpha|$ 次拟齐次的.(注意到 $r(\delta_\lambda(x)) = \lambda r(x)$，证明过程中要求 $0 < \lambda < 1$，因而上述说法不够严密，因此须补充定义，作适当的延拓，使 $E_1$ 在整个 $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ 有意义. 为此令

$$\tilde{E}_1(x) = \lambda^{|\alpha|-m} E_1 \circ \delta_\lambda(x)$$

$\forall x \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$，取 $\lambda < \dfrac{b'}{r(x)}$，则 $\lambda r(x) < b'$，证明的细节留做练习).

又因为 $P[W] = P[E] - P[E_1]$，$P[E] = \delta(x)$ 是 $-|\alpha|$ 次拟齐次，$P[E_1]$ 是 $-|\alpha|$ 次拟齐次，所以 $P[W]$ 也是 $-|\alpha|$ 次拟齐次的. 但是 $P[W] \in C^\infty(\omega_{b'})$，故由命题 6.4 知，$W$ 为多项式，所以 $P[W] \equiv 0$，即得

$$P[E_1] = P[E] = \delta(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\} \tag{7.6}$$

根据 $P$ 的亚椭圆性知 $E_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$.

情形二：$m \geqslant |\alpha|$. 将 $V(x)$ 展开为

$$V(x) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha + N \sum_{|\alpha| = N} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^{N-1} \partial^\alpha V(sx) \mathrm{d}s \tag{7.7}$$

因此

$$\int_t^1 \tau^{|\alpha|-m-1} V \circ \delta_\tau(x) \mathrm{d}\tau =$$

$$\sum_{|\alpha|<N} \int_t^1 \tau^{a\cdot\alpha+|\alpha|-m-1} \mathrm{d}\tau \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha +$$

$$N \sum_{|\alpha|=N} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_t^1 \tau^{a\cdot\alpha+|\alpha|-m-1} \cdot$$

$$\int_0^1 (1-s)^{N-1} \partial^\alpha V(s\delta_\tau(x)) \mathrm{d}s \mathrm{d}\tau =$$

$$\sum_{|\alpha|<N} \int_t^1 \tau^{a\cdot\alpha+|\alpha|-m-1} \mathrm{d}\tau \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha + u_1(x,t) \tag{7.8}$$

取 $N$ 足够大 $\left(\frac{a\cdot\alpha}{a_*} \geqslant N > \frac{m-|a|}{a_*}\right)$，使得

$$a\cdot\alpha + |a| - m \geqslant a_* N + |a| - m > 0$$

式(7.8)等号右边等于

$$\sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|a|-m\neq 0} \frac{1-t^{a\cdot\alpha+|a|-m}}{a\cdot\alpha+|a|-m} \cdot \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha +$$

$$\sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|a|-m=0} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha \ln\frac{1}{t} + u_1(x,t) \tag{7.9}$$

所以，从式(7.3)，可得

$$E(x) = t^{|a|-m} E \circ \delta_\tau + \int_t^1 \tau^{|a|-m-1} V \circ \delta_\tau(x) \mathrm{d}\tau =$$

$$t^{|a|-m} E \circ \delta_\tau(x) +$$

$$\sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|a|-m\neq 0} \frac{1}{a\cdot\alpha+|a|-m} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha -$$

$$\sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|a|-m\neq 0} \frac{t^{a\cdot\alpha+|a|-m}}{a\cdot\alpha+|a|-m} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha +$$

$$\sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|a|-m=0} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha \ln\frac{1}{t} + u_1(x,t) =$$

$$t^{|a|-m}(E \circ \delta_t - q_1 \circ \delta_t(x)) +$$

$$q(x) \ln\frac{1}{t} + [u_1(t,x) + q_1(x)] \tag{7.10}$$

其中

$$q(x) = \sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|\alpha|-m=0} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

$$q_1(x) = \sum_{|\alpha|<N, a\cdot\alpha+|\alpha|-m\neq 0} \frac{1}{a\cdot\alpha+|\alpha|-m} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

令 $\lim_{t\to 0}[u_1(t,x)+q_1(x)] = W(x)$，则 $W(x)\in C^\infty(\omega_b)$. 又令

$$\lim_{t\to 0}[t^{|\alpha|-m}(E-q_1)\circ\delta_t(x)+q(x)\ln\frac{1}{t}] = E_1(x)$$

则 $E_1(x)\in\mathscr{D}'(\omega_{b'})$，因此

$$E(x) = E_1(x) + W(x) \tag{7.11}$$

易证

$E_1\circ\delta_\lambda(x) =$

$$\lim_{t\to 0}\left[\lambda^{m-|\alpha|}(\lambda t)^{|\alpha|-m}(E-q_1)\circ\delta_{\lambda t}(x)+\lambda^{m-|\alpha|}q(x)\ln\frac{1}{t}\right]=$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\lambda^{m-|\alpha|}(\lambda t)^{|\alpha|-m}(E-q_1)\circ\delta_{\lambda t}(x)+\lambda^{m-|\alpha|}q(x)\ln\frac{1}{\lambda t}\right]+$$

$$\lim_{t\to 0}\left[-\lambda^{m-|\alpha|}q(x)\ln\frac{1}{\lambda t}+\lambda^{m-|\alpha|}q(x)\ln\frac{1}{t}\right]=$$

$$\lambda^{m-|\alpha|}E_1(x)+\lambda^{m-|\alpha|}q(x)\ln\frac{1}{\lambda}=$$

$$\lambda^{m-|\alpha|}\left[E_1(x)+q(x)\ln\frac{1}{\lambda}\right] \tag{7.12}$$

令 $E^*(x) = E_1(x) - q(x)\ln\frac{1}{r(x)}$，易证

$$E^*\circ\delta_\lambda(x) = E_1\circ\delta_\lambda(x) - (q(x)\ln\frac{1}{r(x)})\circ\delta_\lambda(x) =$$

$$\lambda^{m-|\alpha|}\left[E_1(x)+q(x)\ln\frac{1}{\lambda}\right]-\lambda^{m-|\alpha|}q(x)\ln\frac{1}{\lambda r(x)} =$$

$$\lambda^{m-|\alpha|}\left[E_1(x)-q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right]=\lambda^{m-|\alpha|}E^*(x)$$

因此 $E^*$ 是 $m-|\alpha|$ 次拟齐次的，且

$$E(x) = E^*(x) + q(x)\ln\frac{1}{r(x)} + W(x) \qquad (7.13)$$

第四步：为了证明当 $m < |a|$ 或 $m \neq |a| + a \cdot \beta, \beta \in I_+^n$ 时 $q(x) \equiv 0$，想要证明 $P[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}]$ 是 $-|a|$ 次拟齐次的. 注意到

$$L\left[\ln\frac{1}{r}\right] = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{1}{r\circ\delta t}\bigg|_{t=1} =$$

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\frac{1}{tr}\right]\bigg|_{t=1} =$$

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\frac{1}{t} + \ln\frac{1}{r}\right]\bigg|_{t=1} = -1$$

因此

$$LP\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] = PL\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] - mP\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] =$$

$$P\left[L[q(x)]\ln\frac{1}{r(x)} - q(x)\right] - mP\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] =$$

$$P[-q(x)] + P\left[(m - |a|)q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] - mP\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] =$$

$$-|a|P\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] \qquad (7.14)$$

这里用到 $q(x)$ 是 $m - |a|$ 次拟齐次多项式，$P$ 是 $m$ 次 LPDO，故 $P[q(x)] \equiv 0$. 因为

$$P[W] = P[E] - P[E^*] - P\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] =$$

$$\delta(x) - P[E^*] - P\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right]$$

为 $-|a|$ 次拟齐次的，故 $P[W] = 0$. 又 $P$ 为亚椭圆算子，且 $P[E^*] = \delta(x) - P\left[q(x)\ln\frac{1}{r(x)}\right] \in C^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$，所以 $E^* \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$，故式 (7.13) 满足定理结论. 由

$q(x) = \sum_{a \cdot \alpha + |a| - m = 0} \frac{\partial^\alpha V(0)}{\alpha!} x^\alpha$，$a \cdot \alpha + |a| - m = 0 \Leftrightarrow m = |a| + a \cdot \alpha$ 看出：

(1) 当 $m < |a|$ 时，不会出现 $q(x)$；

(2) 当 $m \neq |a| + a \cdot \alpha$ 时，即不存在 $\alpha \in I_+^n$ 满足上面的式子，所以 $q(x)$ 不出现. 证毕.

该定理说明，如果基本解存在，则必具有式(7.6)的形式，然而什么情形下基本解存在呢?这里只叙述下面的存在定理.

**定理 7.3(Folland - Stein 定理)**　若 $P(x,\partial)$ 是 $m$ 次拟齐性 LPDO，其中 $0 < m < |a|$，若 $P$ 及 $P^t$ 在 $x = 0$ 的某邻域内是亚椭圆的，则 $P$ 及 $P^t$ 的基本解存在(在原点的某个邻域内).

## 7.3　可去奇性定理

先证明 $\mathbf{R}^n$ 中调和函数的一个可去奇性定理.

**定理 7.4**　设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$x_0 \in \Omega$，$u$ 在 $\Omega \setminus \{x_0\}$ 中调和，若当 $\| x - x_0 \| \to 0$ 时，

$$
|u(x)| = \begin{cases} o(\| x - x_0 \|^{2-n}), & n \geqslant 3 \\ o\left(\ln \dfrac{1}{\| x - x_0 \|}\right), & n = 2 \end{cases}
$$

则可补充定义 $u(x_0)$，使 $u \in C^2(\Omega)$，且在 $\Omega$ 中调和($x_0$ 称为 $u$ 的可去奇点).

**证明**　(1) 当 $n \geqslant 3$ 时(该证明中的技巧是常用的).

取 $R > 0$，使 $\omega_R(x_0) \subset \Omega$，取 $V(x)$ 满足 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases} \Delta V = 0, & x \in \omega_R(x_0) \\ V|_{\partial\omega_R} = u|_{\partial\omega_R} \end{cases}
$$

$V(x)$ 存在，且有明确的表达式.

任给正数 $\varepsilon$，令 $W_\varepsilon = u(x) - V(x) - \varepsilon(\| x - x_0 \|^{2-n} - R^{2-n})$，

$x \neq x_0$，取充分小的 $\delta$，当 $x \in \omega_R \backslash \omega_\delta$ 时，有 $\Delta W_\varepsilon \equiv 0$（这是由于 $u(x)$，$V(x)$ 以及 $\| x - x_0 \|^{2-n}$ 在 $\omega_R \backslash \omega_\delta$ 内调和），而且当 $\| x - x_0 \| = R$ 时，$W_\varepsilon = 0$（代入验证即可）；当 $\| x - x_0 \| = \delta$ 时，

$$u(x)\Big|_{\| x - x_0 \| = \delta} = o(\delta^{2-n})$$

只要 $\delta$ 足够小，一定有 $W_\varepsilon \Big|_{\| x - x_0 \| = \delta} < 0$，所以由极值原理知，当 $\delta < \| x - x_0 \| < R$ 时，$W_\varepsilon \leqslant 0$，即得

$$u - V \leqslant \varepsilon(\| x - x_0 \|^{2-n} - R^{2-n}), \qquad 0 < \| x - x_0 \| < R$$

令 $\varepsilon \to 0$，得 $u - V \leqslant 0$，$\forall x \in \omega_R \backslash \{x_0\}$. 换 $\varepsilon$ 为 $-\varepsilon$，可证 $u(x) - V(x) \geqslant 0$，所以

$$u(x) \equiv V(x), \quad x \in \omega_R \backslash \{x_0\}$$

定义 $u(x_0) = V(x_0)$，则 $u \equiv V (x \in \omega_R)$，结论得证.

（2）当 $n = 2$ 时，取 $R > 0$，使 $\omega_R(x_0) \subset \Omega$. 取 $v(x)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{在 } \omega_R(x_0) \text{ 中} \\ v\big|_{\partial\omega_R} = u\big|_{\partial\omega_R} \end{cases}$$

任给 $\delta > 0$，令

$$W_\varepsilon = u(x) - v(x) - \varepsilon\left(\ln \frac{1}{\| x - x_0 \|} - \ln \frac{1}{R}\right), \quad x \neq x_0$$

其余证法类似.

**定理 7.5** 设 $P(x, \partial)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有 $C^\infty$ 系数的拟齐性 $m$ 次 LPDO，$m > 0$. 设 $P(x, \partial)$ 在 $x = 0$ 的某邻域 $\omega_b$ 中是亚椭圆型的，若 $u \in \mathscr{D}'(\omega_b)$，在 $\omega_b \backslash \{0\}$ 中 $P[u] = 0$（从而 $u \in C^\infty(\omega_b \backslash \{0\})$），且当 $r(x) \to 0$ 时，

$$| u(x) | = o(r^{m-|\alpha|})$$

则在某个 $\omega_{b'}$ 中，有 $P(x, \partial)u = 0$，从而 $u \in C^\infty(\omega_{b'})$，所以 $x = 0$ 为可去奇点（其中 $\omega_b = \{x \mid r(x) < b\}$）.

**证明** 由于难于寻求相应于 $P$ 的 Dirichlet 问题的解 $V$，这里的证法不同于前面的证法.

因为 $u \in \mathscr{D}'(\omega_b)$，所以 $P(x,\partial)u \in \mathscr{D}'(\omega_b)$. 已知在 $\omega_b \backslash \{0\}$ 中 $P(x,\partial)u = 0$，即

$$\operatorname{supp}\{P(x,\partial)u\} = \{0\}$$

所以由广义函数结构定理，在某个 $\omega'_b$ 中成立

$$P(x,\partial)u = \sum_{|\alpha \leqslant N} C_\alpha \partial^\alpha \delta(x) \tag{7.15}$$

下面想办法证明所有的 $C_\alpha = 0(|\alpha| \leqslant N)$.

因为

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} x_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} x_n^{\beta_n} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_1 !}{(\beta_1 - \alpha_1)!} x_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdots \dfrac{\beta_n !}{(\beta_n - \alpha_n)!} x_n^{\beta_n - \alpha_n}, & \beta \geqslant \alpha \\ 0, & \text{其他} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}, & \beta \geqslant \alpha \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$\partial^\alpha x^\beta \Big|_{x=0} = \begin{cases} \beta!, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

现在的证明是构造性的，从式(7.15)有

$$\langle P(x,\partial)u, \phi \rangle = \sum_{\alpha \leqslant N} C_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(0), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\omega'_b) \tag{7.16}$$

令 $\phi_\beta(x) = \varphi \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x) x^\beta$，其中 $\varphi \in C_0^\infty(\omega_1)$，$\omega_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid r(x) < 1\}$，且当 $r(x) < \dfrac{1}{2}$ 时，$\varphi \equiv 1$，则

$$\langle P(x,\partial)u, \phi_\beta \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant N} C_\alpha (-1)^\alpha \partial^\alpha \phi_\beta \Big|_{x=0} = C_\beta (-1)^{\beta} \beta! \tag{7.17}$$

另外，

$$\langle P(x,\partial)u, \phi_\beta \rangle = \langle u, P(x,\partial)^t \phi_\beta \rangle =$$

$$\int_{\omega_\varepsilon} u(x)P^t[\varphi \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)x^\beta]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\omega_\varepsilon} u(x)P^t[(x^\beta\varphi) \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)]\mathrm{d}x\varepsilon^{\alpha\cdot\beta} =$$

$$\int_{\omega_\varepsilon} u(x)P^t[x^\beta\varphi] \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)\mathrm{d}x\varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m} \tag{7.18}$$

令极坐标变换 $x = r\delta_{\frac{1}{r}}(x) = r\sigma(x)(|\sigma| = |\sigma(x)| = 1)$，则 $\langle P(x,\partial)u,\phi_\beta\rangle =$

$$\int_0^\varepsilon\int_{|\sigma|=1} u(r\sigma)P^t[x^\beta\varphi] \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(r\sigma)S(\sigma)r^{|\alpha|-1}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r\varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m} \tag{7.19}$$

结合式(7.17) 即得

$$\beta! \mid C_\beta \mid \leqslant$$

$$\int_0^\varepsilon\int_{|\sigma|=1} \mid u(r\sigma) \mid\mid P^t[x^\beta\varphi] \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(r\sigma) \mid S(\sigma)r^{|\alpha|-1}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r\varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m} \leqslant$$

$$C\int_0^\varepsilon\int_{|\sigma|=1} \mid u(r\sigma) \mid \mathrm{d}\sigma \cdot r^{|\alpha|-1}\mathrm{d}r \cdot \varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m} \tag{7.20}$$

(由于 $S(\sigma)$ 及 $P[x^\beta\varphi] \circ \delta_{\frac{1}{\varepsilon}}$ 在 $|\sigma| = 1$ 上有界). 令 $\dfrac{u(x)}{r^{m-|\alpha|}(x)} = u_0(x)$，则当 $r(x) \to 0$ 时，$| u(x) | = o(r^{m-|\alpha|})$，知 $u_0(x) \to 0$，式(7.20) 化为

$$\beta! \mid C_\beta \mid \leqslant C\int_0^\varepsilon\left(\int_{|\sigma|=1} \mid u_0(r\sigma) \mid \mathrm{d}\sigma\right)r^{m-1}\mathrm{d}r \cdot \varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m} =$$

$$C\int_0^\varepsilon V_0(r)r^{m-1}\mathrm{d}t \cdot \varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m} \overset{\text{(积分中值定理)}}{=\!=\!=\!=}$$

$$C\varepsilon^{\alpha\cdot\beta-m}V_0(\lambda\varepsilon)\frac{\varepsilon^m}{m} =$$

$$CV_0(\lambda\varepsilon)\frac{\varepsilon^{\alpha\cdot\beta}}{m} \to 0, \quad \text{当 } \varepsilon \to 0 (\beta \neq 0)$$

这里 $V_0(r) = \int_{|\sigma|=1} | u_0(r\sigma) | \mathrm{d}\sigma$. 当 $\beta = 0$ 时，知 $V_0(\lambda\varepsilon) \to 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，所以 $C_\beta = 0$. 这样一来在 $\omega_{b'}$ 中 $P[u] = 0$. 由 $P(x,\partial)$ 的

亚椭圆性推出 $u \in C^{\infty}(\omega_{b'})$. 因此 $x = 0$ 为可去奇点. 证毕.

这里的证明思路为:系数 $C_\beta$ 用积分式表示,估计积分值,从而估计出系数 $C_\beta$ 的值.

**定理 7.6**　设 $P(x,\partial)$ 满足定理 7.5 的条件,且 $m = |a| + a \cdot \beta, \beta \in I_+^n$. 若 $P(x,\partial)$ 有基本解 $E(x) = E^*(x) + q(x)\ln\frac{1}{r} + W(x)$(如上节所述),如果当 $r(x) \to 0$ 时,$u(x) = o\left(r^{m-|a|}\ln\frac{1}{r}\right)$,且在 $\omega_b \setminus \{0\}$ 中 $P[u] = 0$,则 $x = 0$ 是 $u$ 的可去奇点.

**证明**　与定理7.5的证法相同可得:当$\beta \neq 0$时,$C_\beta = 0$,于是 $P[u] = C_0\delta(x)$ 在 $\omega_{b'}$ 中. 下面证明 $C_0 = 0$,用反证法. 若 $C_0 \neq 0$,则 $P\left[\frac{1}{C_0}u\right] = \delta(x)$,又 $PE = \delta(x)$,因而

$$P\left[\frac{u}{C_0} - E\right] = 0$$

由 $P$ 之亚椭圆性推知$\frac{u(x)}{C_0} - E(x) := W_1(x) \in C^{\infty}(\omega_{b'})$,即

$$\begin{aligned}
u(x) &= C_0(E(x) + W_1(x)) = \\
&C_0\left(E^*(x) + q(x)\ln\frac{1}{r} + W_2(x)\right) \xlongequal{\text{(利用极坐标变换 } \sigma(x) = \delta_{\frac{1}{r}}\text{)}} \\
&C_0\left[r^{m-|a|}E^*(\sigma) + r^{m-|a|}q(\sigma)\ln\frac{1}{r} + W_2(x)\right] \qquad (7.21)
\end{aligned}$$

这里记 $W_2(x) = W(x) + W_1(x)$.

因为当 $r \to 0$ 时,

$$\frac{u(x)}{r^{m-|a|}\ln\frac{1}{r}} \to 0$$

由式(7.21) 及假定($C_0 \neq 0$) 推知,当 $r \to 0$ 时,

$$\frac{E^*(\sigma)}{\ln\frac{1}{r}} + q(\sigma) + \frac{W_2(x)}{r^{m-|a|}\ln\frac{1}{r}} \to 0$$

由 $E^* \in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 及 $|\sigma| = 1$,知$\dfrac{E^*(\sigma)}{\ln\dfrac{1}{r}} \to 0(r\to 0)$. 所以

$$\lim_{r\to 0}\frac{W_2(x)}{r^{m-|\alpha|}\ln\dfrac{1}{r}} = -q(\sigma) \tag{7.22}$$

接下来要证明 $q(\sigma)\equiv 0$.

将 $W_2(x)$ 在原点展开,得

$$W_2(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant N}\frac{\partial^\alpha W_2(0)}{\alpha!}x^\alpha + R_{N+1} =$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N}\frac{\partial^\alpha W_2(0)}{\alpha!}(\sigma\circ\delta_r)^\alpha + R_{N+1} =$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N}\frac{\partial^\alpha W_2(0)}{\alpha!}r^{a\cdot\alpha}\sigma^\alpha + R_{N+1}$$

(记 $m_l = \{a\cdot\alpha = m_j, |\alpha|\leqslant N, j = 1,\cdots,k\}$) $=$

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\left(\sum_{a\cdot\alpha=m_j}\frac{\partial^\alpha W_2(0)}{\alpha!}\sigma^\alpha\right)r^{a\cdot\alpha} + o(r^{m_k}) =$$

$$\sum_{j=1}^{k}C_j(\sigma)r^{m_j} + o(r^{m_k}) \tag{7.23}$$

由式(7.22) 知

$$\lim_{r\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k}C_j(\sigma)r^{m_j} + o(r^{m_k})}{r^{m-|\alpha|}\ln\dfrac{1}{r}}$$

存在,$0\leqslant l\leqslant k$,则 $C_0(\sigma) = C_1(\sigma) = \cdots = C_k(\sigma) = 0$,且极限为 0($k$ 是有限的),这就证明了 $q(\sigma) = 0$. 这与定理 7.2 矛盾,于是 $C_0 = 0$,就有 $P[u] = 0$ 在 $\omega_{b'}$ 中,由亚椭圆性 $u\in C^\infty(\omega_{b'})$,从而 $x = 0$ 为可去奇点. 证毕.

**定理 7.7** 设 $P(x,\partial)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有 $C^\infty$ 系数的 LPDO,并且在 $x = 0$ 的某个邻域中是亚椭圆的. 设 $P(x,\partial) = \sum\limits_{j=1}^{k}P_j(x,\partial)$,其中

$P_j(x,\partial)$ 为 $m_j$ 次拟齐性 LPDO，$m_j > 0$，记 $m = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k}\{m_j\}$. 设 $u \in \mathscr{D}'(\omega_b)$，在 $\omega_b \backslash \{0\}$ 中 $Pu = 0$，且当 $r \to 0$ 时，$u(x) = o(r^{m-|a})$，则 $x = 0$ 是 $u$ 的可去奇点(证明留作练习).

**注 7.1**　关于基本解及可去奇性定理的假定中，条件“$P$ 在 $x = 0$ 的某邻域中为亚椭圆的”改为“$P$ 具有性质：若 $u \in \mathscr{D}'(\omega_b)$，在 $\omega_b$ 中 $Pu = 0$，则存在 $\omega_{b'}$，使 $u \in C^\infty(\omega_{b'})$”，结论仍成立.

# 第八章　拟齐性偏微分算子的 Liouville 型定理

本章8.1节介绍LPDO的Liouville型定理的发展概略;8.2节证明拟齐性 LPDO 的 Liouville 型定理;8.3 节介绍常系数 LPDO 的 Liouville 性质;8.4 节研究拟齐性 LPDO 的多项式解空间性质.

## 8.1　LPDO 的 Liouville 型定理的研究和进展

所谓 Liouville 型定理,粗略地说,是指古典的 Liouville 定理在各种偏微分方程,各种区域(流形)以及各种函数类中的拓广.其通过研究偏微分方程解的整体性质,揭示了自然界的某种调和一致性.

众所周知,古典的 Liouville 定理[18] 起源于对古典的 Laplace 算子的研究,其形式为:

**定理 8.1**　若 $u$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的有界调和函数,则 $u$ 为常函数.

对于线性偏微分算子

$$P(x,\partial_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha \tag{8.1}$$

的 Liouville 型定理的研究,长期以来一直受到数学工具发展的限制.直到近代,随着各种各样的数学工具的涌现,带动了这个方向的发展.下面介绍一些对线性偏微分算子的 Liouville 型结果的研究和发展中的几次大的跳跃和主要成果.

广义函数的出现,使偏微分方程理论的研究进入现代理论研究阶段.在广义函数空间中,一个加强的 Liouville 定理[53] 表述

如下：

**定理 8.2**　假设 $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$($\mathbf{R}^n$ 上的缓增广义函数空间）满足

$$\Delta u = 0, \quad 在\ \mathbf{R}^n\ 上$$

则 $u$ 为多项式.

1983 年，著名数学家 Geller 利用齐次群上特有的群平移不变性和群 Fourier 分析，得到了如下的 Liouville 型结果.

**定理 8.3**　设算子 $P$ 为齐次群 $G$ 上左不变齐次亚椭圆微分算子，$u \in \mathscr{S}'(G)$，如果

$$Pu = 0$$

则 $u$ 必为多项式.

以上的研究均依赖于齐次群（欧氏空间可以看做一个一层的齐次群）上特有的群结构和相应的群 Fourier 分析，无法用于研究不具群结构的偏微分算子，故需要新的研究工具出现，或者提出新的研究思路. 直到 1997 年，本著作第一作者经过多年的分析和研究，提取出以前不为人们所重视的伸缩性质，发展了一种新的分析技巧 —— 拟齐性分析方法，即本著作所述之分析技巧，突破群结构的限制，得到了如下的 Liouville 型定理[36]：

**定理 8.4**　设算子 $P$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有光滑系数的拟齐性线性偏微分算子，满足："设 $g \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 且在原点附近 $Pg = 0$，则分布 $g$ 在原点附近光滑." 若 $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$P(x, \partial_x) f = 0$$

则 $f$ 必为多项式.

受以上事实的启发，这里引进 Liouville 性质定义.

**定义 8.1**　设 $P(x, \partial_x)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的偏微分算子，且满足条件：若 $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$（缓增广义函数空间）

$$P(x, \partial_x) u = 0 \tag{8.2}$$

则 $u$ 必为多项式，就称算子 $P(x, \partial_x)$ 具有 Liouville 性质.

注意到，以上所描述的结果都提供了算子 $P$ 具有 Liouville 性质的充分条件，而且都包含有亚椭圆性和拟齐次性. 那么，这些性质是否必要呢？亚椭圆性、拟齐次性和 Liouville 性之间是否有某种本质性的关系呢？算子 $P$ 的 Liouville 性质是否可以用其象征描述呢？在偏微分方程的普适理论中，这些问题看起来都不是那么容易回答的. 在本章，通过研究常系数线性偏微分算子，讨论了它们之间的关系，而且得到了一个充分必要条件：常系数线性偏微分算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质，当且仅当多项式 $P(\mathrm{i}\xi)$ 无非零实根. 进一步，当 $P$ 是拟齐次时，Liouville 性质等价于亚椭圆性；当 $P$ 是齐次时，Liouville 性质等价于算子 $P$ 为椭圆型.

对许多常见的算子，例如热算子，具有阻尼项的波算子，黏性流体力学中的声波算子等，它们的 Liouville 性质研究是比较复杂的，或者是没有得到研究. 作为以上结论的应用，通过讨论象征的实根，研究了以上三类算子的 Liouville 性质，把研究偏微分方程解的整体性态问题转化成一个代数问题. 另外，我们注意到具有阻尼项的波算子和黏性流体中的声波算子既不具有亚椭圆性，也不是拟齐次的，也就是说以前得到的那些充分条件均无法判别其是否具有 Liouville 性质. 在国际上，这些算子的 Liouville 性质在此第一次得到讨论.

## 8.2 拟齐性偏微分算子的 Liouville 型定理

本节主要证明定理 8.4.

### 8.2.1 几个引理

**引理 8.1** 设 $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 是 $\lambda$ 次拟齐次的，且在原点的某个领域内光滑，则

(1) $f$ 是多项式；

(2) 如果 $\lambda \notin \Lambda = \{\lambda_\alpha : \lambda_\alpha = a \cdot \alpha, \alpha \in I_+^n\}$，则 $f \equiv 0$.

**证明**　由条件 $f \in C^\infty(\omega_b)$，$f \circ \delta_r(x) = r^\lambda f(x)$，则 $\partial^\alpha(f \circ \delta_r(x)) = r^{a\cdot\alpha}(\partial^\alpha f) \circ \delta_r(x) = r^\lambda \partial\alpha f(x)$. 即得

$$\partial^\alpha f(x) = r^{a\cdot\alpha-\lambda}(\partial^\alpha f) \circ \delta_r(x) \tag{8.3}$$

令 $a_* = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{a_j\}$，当 $|\alpha| > \dfrac{1}{a_*}\mathrm{Re}\lambda$ 时，$a \cdot \alpha - \mathrm{Re}\lambda > 0$，当 $r \to 0$ 时，则 $\partial^\alpha f(x) = 0$，由 Taylor 展式可知 $f$ 必为多项式

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha x^\alpha \tag{8.4}$$

利用

$$f \circ \delta_r(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha r^{a\cdot\alpha} x^\alpha$$

及 $f$ 的拟齐次性质可知

$$f \circ \delta_r(x) = r^\lambda f(x) = r^\lambda \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha x^\alpha$$

于是

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha \cdot r^{a\cdot\alpha} x^\alpha = r^\lambda \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha x^\alpha \tag{8.5}$$

从而 $a_\alpha(r^{a\cdot\alpha} - r^\lambda) = 0$，因此当 $\lambda \notin \Lambda$，且 $|\alpha| \leqslant N$ 时，$a_\alpha = 0$，故此时 $f = 0$. 证毕.

**引理 8.2**　设 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子 $P$(系数为 $C^\infty$) 满足定理 8.2 的条件，并设 $f \in \mathscr{S}'$，且 $Pf = 0$，则存在常数 $N$，当 $|\alpha| > N$ 时，

$$\partial^\alpha f(0) = 0 \tag{8.6}$$

**证明**　由于 $f \in \mathscr{S}'$，则存在 $C > 0$，$p, q \in I_+$，使得对任意 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，有 $|\langle f, \phi\rangle| \leqslant C\|\phi\|_{p,q}$，其中 $\|\phi\|_{p,q} = \max\limits_{|\alpha|\leqslant p,\ \beta < q}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)|\}$.

对 $\alpha \in I_+^n$，定义空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的线性泛函

$$\langle F_\alpha, \phi\rangle = \int_1^\infty r^{-|a|-a\cdot\alpha-1}\langle f, \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}}\rangle \mathrm{d}r \tag{8.7}$$

想要证明:当 $|\alpha| > N = \dfrac{(p-1)|a|}{a_*}$ 时,$F_\alpha \in \mathscr{S}'$.

对 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$,注意到

$$\|\phi \circ \delta_{\frac{1}{r}}\|_{p,q} = \max_{\substack{|\alpha| \leqslant p \\ |\beta| \leqslant q}} \{\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (\phi \circ \delta_{\frac{1}{r}})|\} =$$

$$\max_{\substack{|\alpha| \leqslant p \\ |\beta| \leqslant q}} \{\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha r^{-a \cdot \beta} (\partial^\beta \phi) \circ \delta_{\frac{1}{r}}|\}$$

令 $y = \delta_{\frac{1}{r}}(x)$,则 $x = \delta_r(y)$,

$$\|\phi \circ \delta_{\frac{1}{r}}\|_{p,q} = \max_{\substack{|\alpha| \leqslant p \\ |\beta| \leqslant q}} \{r^{a \cdot \alpha - a \cdot \beta} \sup_{y \in \mathbf{R}^n} |y^\alpha \partial^\beta \phi(y)|\}$$

注意到 $-q \cdot |a| \leqslant a \cdot \alpha - a \cdot \beta \leqslant p \cdot |a|$,因而

$$r^{a \cdot \alpha - a \cdot \beta} \leqslant \begin{cases} r^{p \cdot |a|}, & r > 1 \\ r^{-q \cdot |a|}, & 0 < r \leqslant 1 \end{cases}$$

且

$$\|\phi \circ \delta_{\frac{1}{r}}\|_{p,q} \leqslant \begin{cases} r^{p|a|} \|\phi\|_{p,q}, & r > 1 \\ r^{-q|a|} \|\phi\|_{p,q}, & 0 < r \leqslant 1 \end{cases} \tag{8.8}$$

则从式(8.7)有

$$|\langle F_\alpha, \phi \rangle| \leqslant C \int_1^\infty r^{-|a| - a \cdot \alpha - 1} \|\phi \circ \delta_{\frac{1}{r}}\|_{p,q} \mathrm{d}r \leqslant$$

$$C \int_1^\infty r^{(p-1)|a| - a \cdot \alpha - 1} \mathrm{d}r \|\phi\|_{p,q}$$

当 $|\alpha| > N = \dfrac{(p-1)|a|}{a_*}$ 时,有 $(p-1)|a| - a \cdot \alpha - 1 < 0$,

从而 $\int_1^\infty r^{(p-1)|a| - a \cdot \alpha - 1} \mathrm{d}r$ 为常数,于是

$$|\langle F_\alpha, \phi \rangle| \leqslant C' \|\phi\|_{p,q} \tag{8.9}$$

所以当 $|\alpha| > N$ 时,$F_\alpha \in \mathscr{S}'$.

下一步证明:当 $|\alpha| > N$ 时,$PF_\alpha = 0$.

实际上,

$$\langle PF_\alpha, \phi \rangle = \langle F_\alpha, P^t \phi \rangle =$$

$$\int_1^\infty r^{-|a|-a\cdot\alpha-1}\langle f,(P^t\phi)\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle \mathrm{d}r \tag{8.10}$$

因为 $P^t$ 为 $m$ 次拟齐性的，且 $Pf=0$，所以

$$\langle f,(P^t\phi)\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle = r^m\langle f,P^t(\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}})\rangle =$$

$$r^m\langle Pf,\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle = 0$$

即对任意 $\phi\in\mathscr{S}$，有 $(PF_\alpha,\phi)=0$，所以 $PF_\alpha=0$. 因此根据算子 $P$ 的假设可知：当 $|\alpha|>N$ 时，分布 $F_\alpha$ 在原点附近光滑：$F_\alpha\in C^\infty(w_b)$.

最后，选取 $\phi\in C_0^\infty$，$\phi\geqslant 0$，$\int_{\mathbf{R}^n}\phi\mathrm{d}x=1$，令 $\phi_\varepsilon=\varepsilon^{-|a|}\phi\circ\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}$，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\partial^\alpha F_\alpha,\phi_\varepsilon\rangle=\partial^\alpha F_\alpha(0),\ |\alpha|>N \tag{8.11}$$

另外，当 $|\alpha|>N$ 时，利用式(8.7)有

$$\langle\partial^\alpha F_\alpha,\phi_\varepsilon\rangle=\langle F_\alpha,(-\partial)^\alpha\phi_\varepsilon\rangle=$$

$$\int_1^\infty r^{-|a|-a\cdot\alpha-1}\langle f,[(-\partial)^\alpha\phi_\varepsilon]\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle\mathrm{d}r=$$

$$\int_1^\infty r^{-|a|-1}\langle f,(-\partial)^\alpha(\phi_\varepsilon\circ\delta_{\frac{1}{r}})\rangle\mathrm{d}r=$$

$$\int_1^\infty r^{-|a|-1}\langle\partial^\alpha f,\phi_\varepsilon\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle\mathrm{d}r=$$

$$\varepsilon^{-|a|}\int_1^\infty r^{-|a|-1}\langle\partial^\alpha f,\phi\circ\delta_{\frac{1}{\varepsilon r}}\rangle\mathrm{d}r$$

令 $\lambda=\varepsilon r$

$$\langle\partial^\alpha F_\alpha,\phi_\varepsilon\rangle=\int_\varepsilon^\infty\lambda^{-|a|-1}\langle\partial^\alpha f,\phi\circ\delta_{\frac{1}{\lambda}}\rangle\mathrm{d}\lambda=$$

$$\int_\varepsilon^\infty\lambda^{-1}\langle\partial^\alpha f,\phi_\lambda\rangle\mathrm{d}\lambda$$

结合式(8.11)有

$$\int_0^\infty\lambda^{-1}\langle\partial^\alpha f,\phi_\lambda\rangle\mathrm{d}\lambda=\partial^\alpha F_\alpha(0),\quad |\alpha|>N \tag{8.12}$$

因为 $Pf=0$ 蕴含 $f$ 在原点附近光滑，所以当 $\lambda\to 0$ 时，$(\partial^\alpha f,\phi_\lambda)\to\partial^\alpha f(0)$. 因此，如果存在某个 $\alpha\in I_+^n$，且 $|\alpha|>N$，使 $\partial^\alpha f(0)\neq 0$，

则式(8.12) 等号左边的积分将发散,此与式(8.12) 等号右边有限产生矛盾. 至此完成了引理 8.2 的证明. 证毕.

**引理 8.3** 设 $g \in \mathscr{S}'$ 在原点附近光滑,且对所有的 $\alpha \in I_+^n$, $\partial^\alpha g(0) = 0$,定义线性泛函 $G_\lambda$ 如下:

$$\langle G_\lambda, \phi \rangle = \int_0^\infty r^{\lambda-1} \langle g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}} \rangle \mathrm{d}r, \quad \phi \in C_0^\infty \tag{8.13}$$

则存在 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$,当 $\mathrm{Re}\lambda < \lambda_0$ 时, $G_\lambda \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

**证明** 由于 $g$ 在原点附近光滑,则存在常数 $b > 0$,使得 $g \in C^\infty(\omega_b)$,其中 $\omega_b = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leqslant b\}$.

对任意的 $R > 0$,取 $\phi \in C_0^\infty(\omega_R)$. 容易看出,任取 $x \in \omega_R$,存在 $r_0 = r(b,R) = \min\left\{\left(\frac{b}{R}\right)^{\frac{1}{a^*}}, 1\right\}$,当 $r < r_0$ 时, $|\delta_r(x)| < R \cdot r_0^{a^*} \leqslant b$. 令 $g_r(x) = g \circ \delta_r(x)$,则当 $r < r_0$ 时, $g_r \in C^\infty(\omega_R)$.

注意到 $g$ 在原点处的任意阶导数为零,所以对任意 $\alpha \in I_+^n$,

$$\partial^\alpha g_r(0) = \partial^\alpha (g \circ \delta_r(x))|_{x=0} = r^{a\cdot\alpha}(\partial^\alpha g) \circ \delta_r(x))|_{x=0} = 0$$

于是由 Taylor 展式,对任意整数 $N > 0$,任取 $x \in \omega_R$,有

$$g_r(x) = \sum_{|\alpha|=N} \partial^\alpha g_r(\xi) \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} r^{a\cdot\alpha}(\partial^\alpha g) \circ \delta_r(\xi) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \tag{8.14}$$

其中 $\xi \in \omega_R$ 依赖于 $x$.

从而对任意 $x \in \omega_R$,有 $|x^\alpha| \leqslant |x|^{|\alpha|} < R^N(|\alpha| = N)$ 及

$$|g_r(x)| \leqslant R^N \sup_{|y| \leqslant b} \Big( \sum_{|\alpha|=n} |\partial^\alpha g(y)| \Big) r^{a\cdot\alpha} = C_N(b,R) r^{a\cdot\alpha} \tag{8.15}$$

这里记 $y = \delta_r(\xi)$,因此

$$|\langle g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}} \rangle| = r^{|a|} |\langle g_r, \phi \rangle| \leqslant C_N(b,R) r^{|a|+a\cdot\alpha} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |\phi(x)| \tag{8.16}$$

取 $N = \max\left\{1, -\left[\frac{\mathrm{Re}\lambda + |a|}{a_*}\right] + 1\right\}$,这里$[\cdot]$表示整数部分,结合式(8.16) 有

$$\left|\int_0^{r_0} r^{\lambda-1}\langle g,\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle \mathrm{d}r\right|\leqslant$$

$$C_N(b,R)\int_0^{r_0} r^{\lambda-1+a+a\cdot a}\mathrm{d}r\cdot\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\phi(x)|\leqslant$$

$$C(b,R,\lambda)\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\phi| \tag{8.17}$$

式中 $N$ 的取法保证 $\mathrm{Re}\lambda+|a|+a_*N-1\geqslant a_*-1>-1$. 下面考虑 $r>r_0$ 的情形.

因为 $g\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$,所以存在 $C>0$,整数 $p\geqslant 0,q\geqslant 0$,使得

$$|\langle g,\phi\rangle|\leqslant C\|\phi\|_{p,q}$$

因此,当 $r>r_0$ 时,有

$$|\langle g,\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle|\leqslant C\|\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\|_{p,q}=$$

$$C\max_{\substack{|\alpha|\leqslant p\\ |\beta|\leqslant q}}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\cdot\partial^\beta(\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}(x))|\}=$$

$$C\max_{\substack{|\alpha|\leqslant p\\ |\beta|\leqslant q}}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha r^{-a\cdot\beta}\cdot(\partial^\beta\phi)\circ\delta_{\frac{1}{r}}(x))|\}\leqslant$$

$$Cr^p\left(\sum_{|\beta|\leqslant q}r_0{}^{a\cdot\beta}\right)\max_{|\beta|\leqslant q}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x))|\}$$

即当 $r>r_0$ 时,有

$$|\langle g,\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle|\leqslant C'(b,R)\max_{|\beta|\leqslant q}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)|\}r^p \tag{8.18}$$

所以当 $\mathrm{Re}\lambda<-p$ 时,有 $\mathrm{Re}\lambda+p-1<-1$ 和

$$\left|\int_{r_0}^{\infty} r^{\lambda-1}\langle g,\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle\mathrm{d}r\right|\leqslant C(b,R,\lambda)\max_{|\beta|\leqslant q}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)|\} \tag{8.19}$$

结合式(8.17)和式(8.19),对 $\mathrm{Re}\lambda<-p=\lambda_0,\phi\in C_0^\infty(\omega_R)$,有

$$|\langle G_\lambda,\phi\rangle|=\left|\int_0^{\infty} r^{\lambda-1}\langle g,\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle\mathrm{d}r\right|\leqslant$$

$$C(b,R,\lambda)\max_{|\beta|\leqslant q}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)|\} \tag{8.20}$$

由 $R>0$ 的任意性,引理证明完成. 证毕.

### 8.2.2 定理 8.4 的证明

定理的证明分三步完成.

第一步:设 $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 且 $Pf = 0$. 由引理 8.2 和算子 $P$ 的假设可知 $f$ 在原点附近光滑:$f \in C^\infty(\omega_b)$,且存在 $N \in I_+$,使得对 $\alpha \in I_+^n$,$|\alpha| > N$,有 $\partial^\alpha f(0) = 0$. 令

$$f_N(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \tag{8.21}$$

且令

$$g(x) = f(x) - f_N(x) \tag{8.22}$$

注意到 $f_N$ 是一个多项式,所以为证 $f$ 为多项式,只须证明 $g \equiv 0$ 就足够了.

显然 $g \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$,在原点附近光滑:$g \in C^\infty(\omega_b)$,且对任意 $\alpha \in I_+^n$,$\partial^\alpha g(0) = 0$. 对 $\phi \in C_0^\infty$,定义泛函 $G_\lambda$ 如下

$$\langle G_\lambda, \phi \rangle = \int_0^\infty r^{\lambda-1} \langle g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}} \rangle \mathrm{d}r \tag{8.23}$$

由引理 8.3,存在 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$,当 $\mathrm{Re}\lambda < \lambda_0$ 时,$G_\lambda \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

第二步:为了证明 $g \equiv 0$,想要证明:当 $\mathrm{Re}\lambda < \lambda_0$ 时,$G_\lambda \equiv 0$.

首先注意 $G_\lambda$ 是 $-\lambda - |a|$ 次拟齐次的. 实际上,当 $\mathrm{Re}\lambda < \lambda_0$ 时,

$$\begin{aligned}
\langle G_\lambda \circ \delta_s, \phi \rangle = {} & s^{-|a|} \langle G_\lambda, \phi \circ \delta_{\frac{1}{s}} \rangle = \\
& s^{-|a|} \int_0^\infty r^{\lambda-1} \langle g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{s}} \circ \delta_{\frac{1}{r}} \rangle \mathrm{d}r = \\
& s^{-|a|} \int_0^\infty r^{\lambda-1} \langle g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{sr}} \rangle \mathrm{d}r = \\
& s^{\lambda-|a|} \int_0^\infty r^{\lambda-1} \langle g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}} \rangle \mathrm{d}r = \\
& s^{\lambda-|a|} \langle G_\lambda, \phi \rangle
\end{aligned}$$

所以 $G_\lambda \circ \delta_s = s^{\lambda-|a|} G_\lambda$.

其次，当 $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ 时，$PG_\lambda = 0$. 实际上，

$$\langle PG_\lambda, \phi\rangle = \langle G_\lambda, P^t\phi\rangle =$$

$$\int_0^\infty r^{\lambda-1}\langle g, (P^t\phi)\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle \mathrm{d}r =$$

$$\int_0^\infty r^{\lambda-1}\langle g, r^m P^t(\phi\circ\delta_{\frac{1}{r}})\rangle \mathrm{d}r =$$

$$\int_0^\infty r^{m+\lambda-1}\langle Pg, \phi\circ\delta_{\frac{1}{r}})\rangle \mathrm{d}r$$

因为 $g = f - f_N$，$Pf = 0$，所以当 $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ 时，

$$\langle PG_\lambda, \phi\rangle = -\int_0^\infty r^{m+\lambda-1}\langle P[f_N], \phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle \mathrm{d}r \tag{8.24}$$

定理6.3表明 $Pf_N$ 为多项式. 又因为 $Pf_N = -Pg$，且 $Pg$ 在原点处的任意阶导数为零，所以多项式 $Pf_N = 0$，从而当 $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ 时，$PG_\lambda = 0$，因此 $G_\lambda$ 在原点附近光滑：$G_\lambda \in C^\infty(\omega_b)$.

综上所述，$G_\lambda$ 满足引理 8.1 的条件，从而对任意 $\alpha \in I_+^n$，且 $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$，$\lambda \neq -|a| - a\cdot\alpha$ 时，$G_\lambda = 0$.

对任意 $\phi \in C_0^\infty$，记

$$h_\phi(\lambda) = \int_0^\infty r^{\lambda-1}\langle g, \phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle \mathrm{d}r \tag{8.25}$$

注意到 $h_\phi(\lambda) = \langle G_\lambda, \phi\rangle$，所以在区域 $\Omega_0 = \{\lambda\in\mathbf{C}, \operatorname{Re} < \lambda_0\}$ 中，除离散集 $\{\lambda_\alpha = -|a| - a\cdot\alpha, \alpha\in I_+^n\}$ 外，$h_\phi(\lambda)$ 处处为零. 另外，由式(8.16)、式(8.18) 和不等式 $|r^{\lambda-1} - r^{s-1}| \leqslant 2r^{s-1}|\ln r||\lambda - s|$ 可知，$h_\phi(\lambda)$ 在区域 $\Omega_0$ 中连续，从而在整个区域 $\Omega_0$ 中 $h_\phi(\lambda) = 0$，即当 $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ 时，$G_\lambda = 0$.

第三步：任取 $\phi \in C_0^\infty$，记 $g_\phi(r) = \langle g, \phi\circ\delta_{\frac{1}{r}}\rangle$，式(8.25) 化为

$$h_\phi(\lambda) = \int_0^\infty r^{\lambda-1} g_\phi(r)\mathrm{d}r$$

从而 $h_\phi(\lambda)$ 可被看做 $g_\phi$ 在 Mellin 变换下的像.

如前所证，当 $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ 时，$h_\phi(\lambda) = 0$. 因此，为了完成本定理的证明，下面只须证明 $g_\phi(\lambda)$ 满足局部 Lipschitz 条件，来保证

Mellin 逆变换的应用(见参考文献[54])：

$$g_\phi(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\lambda - i\infty}^{\mathrm{Re}\lambda + i\infty} r^{-\lambda} h_\phi(\lambda)\mathrm{d}\lambda, \quad r > 0 \tag{8.26}$$

用 $L = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \partial_j$，以及令

$$M(r) = \begin{cases} r^{-q|a|-1}, & 0 < r \leqslant 1 \\ r^{p|a|-1}, & r > 1 \end{cases} \tag{8.27}$$

对 $\phi \in C_0^\infty$，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\phi \circ \delta_{\frac{1}{r}}) = -r^{-1}(L[\phi]) \circ \delta_{\frac{1}{r}} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \partial_j L\phi \tag{8.28}$$

且

$$\| L\phi \|_{p,q} \leqslant 2n \mid a \mid \| \phi \|_{p+1,q+1} \tag{8.29}$$

令$[A,B] \subset (0,\infty)$，$r,s \in [A,B]$，结合式(8.27)、式(8.28)、式(8.29) 和式(8.8) 有

$$\begin{aligned}
\mid g_\phi(r) - g_\phi(s) \mid = & \mid (g, \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}} - \phi \circ \delta_{\frac{1}{s}}) \mid \leqslant \\
& C \| \phi \circ \delta_{\frac{1}{r}} - \phi \circ \delta_{\frac{1}{s}} \|_{p,q} = \\
& C \left\| \int_s^r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\phi \circ \delta_{\frac{1}{\tau}}]\mathrm{d}\tau \right\|_{p,q} = \\
& C \left\| -\int_s^r \tau^{-1}(L\phi \circ \delta_{\frac{1}{\tau}} \mathrm{d}\tau \right\|_{p,q} \leqslant \\
& C \left| \int_s^r \| \tau^{-1}(L\phi) \circ \delta_{\frac{1}{\tau}} \|_{p,q} \mathrm{d}\tau \right| \leqslant \\
& C \left| \int_s^r M(\tau)\mathrm{d}\tau \right| \| L\phi \|_{p,q} \leqslant \\
& C \left| \int_s^r M(\tau)\mathrm{d}\tau \right| 2n \mid a \mid \| \phi \|_{p+1,q+1}
\end{aligned}$$

记 $M = \sup_{r\in[A,B]} \{M(r)\}$，则

$$\mid g_\phi(r) - g_\phi(s) \mid \leqslant 2CMn \mid a \mid \| \phi \|_{p+1,q+1} \mid r - s \mid \tag{8.30}$$

即 $g_\phi(r)$ 在$(0,\infty)$ 内局部 Lipschitz 连续.

因此式(8.26)成立.又因为当 $\mathrm{Re}\lambda < \lambda_0$ 时,$h_\phi(\lambda) = 0$,所以 $g_\phi(r) = 0$.特别地,任取 $\phi \in C_0^\infty$,$(g,\phi) = g_\phi(1) = 0$,即 $g \equiv 0$,因此 $f \equiv f_N$.至此完成了定理 8.4 的证明.

**注 8.1**　可考虑其逆定理,目前这还是一个开问题.若 $f$ 非解析,即使对 $\forall \alpha \in I_+^n$,$\partial^\alpha f(x) = 0$,$f(x)$ 也不一定是多项式.

**引理 8.4**　若 LPDO $P(x,\partial)$,$Q(x,\partial)$ 在区域 $\omega$ 中是亚椭圆的,则 $PQ$ 在 $\omega$ 中也是亚椭圆的.

**证明**　$\forall u \in \mathscr{D}'(\omega)$,S. S. $PQ[u]$ = S. S. $Qu$ = S. S. $u$,所以 $PQ$ 在 $\omega$ 中是亚椭圆的.证毕.

**推论 8.1**　设 $P(x,\partial)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具 $C^\infty$ 系数的 $m$ 次拟齐性 LPDO,$m > 0$ 且 $P$ 在 $x = 0$ 的某邻域中是亚椭圆的,则若 $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$,$P[u] = f$,$f$ 为多项式,有 $u$ 为多项式.

**证明**　设 $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$,且 $P[u] = f$ 为多项式,则存在 $l$,使 $P^l P[u] = P^l[f] = 0$,即 $P^{l+1}[u] = 0$.因此由定理 8.4 知,$u$ 为多项式.证毕.

**注 8.2**　(1) 设 $P$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具 $C^\infty$ 系数的 $m$ 次拟齐性 LPDO,则 $P^l$ 是 $lm$ 次拟齐性的.设 $f = \sum_{\alpha \leqslant k} c_\alpha x^\alpha$,令 $N = \max_{|\alpha \leqslant k}\{a \cdot \alpha\}$,从 $a \cdot \alpha - lm \leqslant N - lm < 0$,即 $l > \dfrac{N}{m}$ 就有

$$P^l f = 0 \tag{8.31}$$

(2) 可以考虑 $u$ 不是缓增分布的情况.

### 8.2.3　例子和评注

考虑 Egrorv 算子

$$P = \partial_x^2 + \mathrm{i}x\partial_y^2$$

如参考文献[16]中证明,Egorov 算子 $P$ 为损失 $\dfrac{2}{3}$ 阶导数的次椭圆算子,所以 $P$ 为亚椭圆算子(见参考文献[17],[32]).进一步,

Egorov 算子 $P$ 关于伸缩 $\delta_r:\delta_r(x,y)=(r^2x,r^3y)$ 为拟齐性的，因此该算子满足定理 8.4 的条件，从而可用本节所讨论的定理得到此类算子的 Liouville 型定理.

**注 8.3** Geller 的定理可以用于讨论许多亚椭圆算子，例如 Hörmander 平方和算子. 但是通过 Rothschild-Stein 的提升定理[49]，用 Geller 的方法来讨论 Egorov 算子看起来还是不可能的.

**注 8.4** 在参考文献[48]中，L. P. Rothschild 和用 Hellffer-Nourrigat 定理[30]得到了 Geller 的定理的逆命题，对本节所证定理的逆命题是否成立至今没有相关的证明，这里作为一个开问题留待其他人研究.

## 8.3 常系数 LPDO 的 Liouville 性质

### 8.3.1 Liouville 性质的充要条件及其证明

**定义 8.2** $\mathbf{R}^n$ 上算子 $P$ 被称为是亚椭圆的，是指任取 $u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，且满足 $Pu=0$，则 $u\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

**引理 8.5** （见参考文献[12,23]）常系数线性偏微分算子 $P=P(\partial)=\sum\limits_\alpha a_\alpha\partial^\alpha$ 是亚椭圆的，当且仅当对任意 $c>0$，存在 $A>0$，任取 $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 且满足 $\|\xi\|<c$，$\|\eta\|>A$，有

$$P(\mathrm{i}\xi-\eta)\neq 0 \tag{8.32}$$

**定理 8.5** $\mathbf{R}^n$ 上常系数线性偏微分算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质，当且仅当对任意 $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 时，有

$$P(\mathrm{i}\xi)\neq 0 \tag{8.33}$$

**证明** 必要性：设算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质. 反证法：假设存在 $\xi^0\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$，使 $P(\mathrm{i}\xi^0)=0$. 令 $u_0(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^0\cdot x}$，其中 $\xi^0\cdot x=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i^0\cdot x_i$. 容易证明 $u_0(x)\in\mathscr{S}'$，且 $P(\partial)u_0(x)=P(\mathrm{i}\xi^0)u_0$

$(x)=0$. 另外，$u_0(x)$ 不是多项式，与算子 $P$ 具有 Liouville 性质矛盾，所以式(8.33) 成立.

充分性：取 $u\in\mathscr{S}'$ 满足 $Pu=0$. 记 $\hat{u}$ 为 $u$ 在 Fourier 变换下的像，由分布理论可知 $\hat{u}\in\mathscr{S}'$，且

$$P(\mathrm{i}\xi)\hat{u}(\xi)=0 \tag{8.34}$$

结合条件式(8.33) 可知 $\operatorname{supp}\{\hat{u}\}=\{0\}$. 具点支集分布的结构性定理表明：存在常数 $C_\alpha$，$|\alpha|\leqslant k$，使得

$$\hat{u}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}C_\alpha\partial^\alpha\delta(\xi)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 测度. 对上式等号两边同时进行 Fourier 逆变换，可得 $u$ 为多项式，即算子 $P$ 具有 Liouville 性质. 证毕.

**推论 8.2**　如果定理 8.5 中的算子 $P(\partial)$ 是齐次的，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 的情形，则算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质的充要条件为算子 $P$ 是椭圆型算子.

**证明**　容易验证算子 $P$ 具有如下形式

$$P(\partial)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\partial^\alpha$$

所以

$$P(\mathrm{i}\xi)=\mathrm{i}^m\sum_{|\alpha|=m}\xi^\alpha$$

结合定理 8.5 的条件以及椭圆算子的定义，就完成本推论的证明.

**推论 8.5**　如果定理 8.5 中的算子 $P(\partial)$ 是拟齐性的，则算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质的充要条件是算子 $P$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的亚椭圆型算子.

**证明**　必要性：设算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质. 任取 $\xi\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，令 $r(\xi)$ 为相应于伸缩族的范数函数(见定理 6.2)，则

$$r(\delta_{\frac{1}{r(\xi)}}(\xi))=\frac{1}{r(\xi)}r(\xi)=1$$

从而

$$\| \delta_{\frac{1}{r(\xi)}}(\xi) \| = 1 \tag{8.35}$$

令

$$d = \inf_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^n \\ \|\xi\| = 1}} | P(\mathrm{i}\xi) |$$

由定理 8.5 可知 $d > 0$. 设算子 $P(\partial)$ 为 $m$ 次拟齐性的，则 $P(\mathrm{i}\xi)$ 为 $m$ 次拟齐次多项式，$\partial^\alpha P(\mathrm{i}\xi)$ 为 $m - a \cdot \alpha$ 次拟齐次多项式. 令 $b_\alpha = \sup\limits_{\xi \in \mathbf{R}^n, \|\xi\| = 1} | \partial^\alpha P(\mathrm{i}\xi) |$，则 $b_\alpha < \infty$. 取 $\xi \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$，$\eta \in \mathbf{R}^n$，记 $r = r(\xi)$，当 $\|\eta\| < c$ 时，

$$\begin{aligned} &| P(\mathrm{i}\xi - \eta | = \\ &\qquad \left| P(\mathrm{i}\xi) + \sum_{\alpha > 0} \partial^\alpha P(\mathrm{i}\xi) \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \right| = \\ &\qquad \left| r^m P(\mathrm{i}\delta_{\frac{1}{r}}(\xi)) + \sum_{\alpha > 0} r^{m - a \cdot \alpha} \partial^\alpha P(\mathrm{i}\delta_{\frac{1}{r}}(\xi)) \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \right| \end{aligned}$$

因此

$$| P(\mathrm{i}\xi - \eta) | \geqslant r^m \left( d - \sum_{|\alpha| > 0} r^{-a \cdot \alpha} \frac{b_\alpha}{\alpha!} c^{|\alpha|} \right) \tag{8.36}$$

由定理 6.2 可知：当 $\|\xi\| \to \infty$ 时，$r(\xi) \to \infty$. 因此当 $\|\xi\| \to \infty$ 时，式(8.36) 等号右边圆括号中的项收敛于 $d > 0$，从而存在常数 $A > 0$，当 $\|\eta\| < c$，$\|\xi\| > A$ 时，$| P(\mathrm{i}\xi - \eta) | > 0$，故由引理 8.5 得出，算子 $P(\partial)$ 是亚椭圆的.

充分性：设算子 $P(\partial)$ 是亚椭圆的. 在引理 8.5 的条件中，令 $\eta = 0$，存在常数 $A > 0$，当 $\|\xi\| > A$ 时，$P(\mathrm{i}\xi) \neq 0$. 任取 $\xi^0 \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$，结合伸缩族 $\delta_\tau$ 的定义，当 $\tau \to \infty$ 时 $\|\delta_\tau(\xi)\| \to \infty$. 因而存在 $\tau_0 > 0$，当 $\tau > \tau_0$ 时，

$$\| \delta_\tau(\xi^0) \| > A$$

因此 $P(\mathrm{i}\xi^0) = \frac{1}{\tau^m} P(\mathrm{i}\delta_\tau(\xi^0)) \neq 0$. 由 $\xi^0$ 的任意性及定理 8.5，算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质. 证毕.

### 8.3.2　例子和定理 8.5 的应用

**例 8.1**　热算子

$$P(\partial) = \partial_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$$

由于

$$P(\mathrm{i}\xi) = \mathrm{i}\xi_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

则 $P(\mathrm{i}\xi) = 0$ 当且仅当 $\xi = 0$. 由定理8.5，算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质. 进一步注意到算子 $P(\partial)$ 关于伸缩族 $\delta_\tau(x) = (\tau x_1, \cdots, \tau x_n, \tau^2 x_{n+1})$ 是 2 次拟齐次的，由推论 8.3 知算子 $P(\partial)$ 是亚椭圆的.

**例 8.2**　波算子

$$P(\partial) = \partial_1^2 - \partial_2^2 + a\partial_1 + b\partial_2, \quad 在 \mathbf{R}^2 上$$

其中 $a, b$ 为实数. 因为

$$P(\mathrm{i}\xi) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 + \mathrm{i}(a\xi_1 + b\xi_2)$$

所以 $P(\mathrm{i}\xi) = 0$ 当且仅当 $|\xi_1| = |\xi_2|$，且 $a\xi_1 + b\xi_2 = 0$，因此算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质当且仅当 $|a| \neq |b|$. 当 $|a| \neq |b|$ 时，算子 $P(\partial)$ 为具有阻尼项的波算子，既不具有拟齐性，也不具有亚椭圆性. 但是，波算子 $\partial_1^2 - \partial_2^2$ 却具有 Liouville 性质.

**例 8.3**　黏性流体力学中的声波算子

$$P(\partial) = \partial_1^2 - \partial_2^2 - 2\partial_1\partial_2^2$$

注意到

$$P(\mathrm{i}\xi) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\mathrm{i}\xi_1\xi_2^2, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$$

所以 $P(\mathrm{i}\xi) = 0$ 当且仅当 $\xi_1 = \xi_2 = 0$，故算子 $P(\partial)$ 具有 Liouville 性质. 但是此算子既不具有拟齐性，也不具有亚椭圆性.

### 8.3.3　猜想

从另外一个角度，在普通的加法和数乘运算下，可以认为 $\mathbf{R}^n$

是一个 Abel 群(交换群),则在群($\mathbf{R}^n$,+)中,常系数线性偏微分算子关于群平移运算是不变的. 象征多项式 $P(\mathrm{i}\xi)$ 可以被看做是算子 $P(\partial)$ 的不可约酉表示 $\pi(P)$. 而定理 8.5 的条件式(8.33),意味着 $\pi(P)$ 是从空间 $\mathscr{S}$(即空间 $C^\infty(\pi)$[39]) 到其自身的内射.

自然地,可以提出如下的猜想:

**猜想**:设算子 $P$ 为 Heisenberg 群或齐次群 $G$ 上的左不变线性偏微分算子(不必拟齐性),则算子 $P$ 具有 Liouville 性质当且仅当,对 $G$ 的每一个非平凡不可约酉表示 $\pi$,$\pi(P)$ 为空间 $C^\infty(\pi)$ 到其自身的内射.

进一步,当算子 $P$ 为齐次群上的拟齐性算子时,以上关于表示的条件即为著名的 Rockland 条件,其等价于算子 $P$ 的亚椭圆性[39];另外,亚椭圆性又等价于算子 $P$ 的 Liouville 性质(见参考文献[25,48]),所以,以上猜想对拟齐次算子是成立的. 但是,对于齐次群上没有拟齐性性质的算子,还没有见到相关的证明,即使对最简单的齐次群——Heisenberg 群也没有见到任何讨论.

## 8.4 关于多项式性质的若干结果

### 8.4.1 关于$\mathscr{S}$(多项式空间)的刻画

**定义 8.3** 令 $\mathscr{S}_0=\{\varphi\in\mathscr{S},\int_{\mathbf{R}^n}x^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x=0,\forall\alpha\in I_+^n\}$,其中 $\mathscr{S}$为急降函数空间,定义

$$\hat{\mathscr{S}_0}=\{\phi\in\mathscr{S}:\phi=\hat{\varphi},\varphi\in\mathscr{S}_0\}\tag{8.37}$$

**命题 8.1** 设 $\phi\in\mathscr{S}$,则 $\phi\in\hat{\mathscr{S}_0}$ 的充要条件为:

$$\partial^\alpha\phi(0)=0,\quad\forall\alpha\in I_+^n$$

**证明** 设 $\phi\in\hat{\mathscr{S}_0}$,则存在 $\varphi\in\mathscr{S}_0$,使 $\phi=\hat{\varphi}$,因而

$$\partial^\alpha\phi(x)\mid_{x=0}=\partial_x^\alpha\hat{\varphi}(x)\mid_{x=0}=$$

$$\left(\partial_x^\alpha\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right)_{x=0}=$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}(-\mathrm{i})^\alpha\xi^\alpha\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$$

反之，若 $\phi \in \mathscr{S}, \partial^\alpha\phi(0) = 0, \forall\, \alpha \in I_+^n$，则

$$0 = \partial^\alpha\phi(0) = \partial^\alpha\phi(x)\mid_{x=0} =$$

$$\left[\partial_x^\alpha\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\check{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi\right]_{x=0} = (-\mathrm{i})^\alpha\int_{\mathbf{R}^n}\xi^\alpha\check{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

得 $\int_{\mathbf{R}^n}\xi^\alpha\check{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \Rightarrow \check{\phi}(\xi) \in \mathscr{S}_0$，从而 $\phi = (\check{\phi})\hat{} \in \hat{\mathscr{S}_0}$. 证毕.

**定义 8.4**　$\mathscr{P}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上所有多项式构成的域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

**命题 8.2**　设 $u \in \mathscr{S}'$，则 $u \in \mathscr{P}$ 的充要条件为

$$\langle u,\phi\rangle = 0,\quad \forall\,\phi \in \mathscr{S}_0 \tag{8.38}$$

**证明**　必要性：设 $u \in \mathscr{S}'$ 且 $u \in \mathscr{P}$，则 $u = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$. 因而对 $\forall\,\phi \in \mathscr{S}_0$，有

$$\langle u,\phi\rangle = \langle \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \phi\rangle = \sum_\alpha a_\alpha\int_{\mathbf{R}^n}x^\alpha\phi(x)\mathrm{d}x = 0$$

充分性：设式(8.38)成立，则 $\langle\hat{u},\hat{\phi}\rangle = 0$，即

$$\langle\hat{u},\varphi\rangle = 0,\quad \varphi \in \hat{\mathscr{S}_0}$$

特别取 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\} \subset \hat{\mathscr{S}_0}$，有 $\langle\hat{u},\varphi\rangle = 0$，从而 $\mathrm{supp}\hat{u} \subset \{0\}$，因此

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha\partial^\alpha\delta(\xi)$$

上式等号两边同时进行 Fourier 逆变换，有

$$u = \sum_{|\alpha\leqslant m}C_\alpha x^\alpha$$

证毕.

充分性是个有意义的结果.

**定义 8.5**　称 $P(x,\partial)$ 具有多项式性质，若

$$u \in \mathscr{S}',\quad Pu \in \mathscr{P} \Rightarrow u \in \mathscr{P} \tag{8.39}$$

**定理 8.6**　设 $P(x,\partial)$ 是系数属于 $\mathscr{P}$ 的 LPDO，则 $P(x,\partial)$ 具

多项式性质的充要条件为：$\forall \phi \in \mathscr{S}_0$，$\exists\ \varphi_j \in \mathscr{S}_0$，使 $P^t[\varphi_j] \to \varphi$（在 $\mathscr{S}$ 的拓扑意义下）.

**证明** 设 $u \in \mathscr{S}'$，由命题 8.2

$$\text{“}Pu \in \mathscr{P} \Rightarrow u \in \mathscr{P}\text{”} \Leftrightarrow$$
$$\text{“}\langle Pu, \phi\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathscr{S}_0\text{”} \Leftrightarrow$$
$$\text{“}\langle u, P^t\phi\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathscr{S}_0\text{”} \Leftrightarrow$$
$$\text{“}P^t(\mathscr{S}_0)\ \text{在}\ \mathscr{S}_0\ \text{中稠密”}$$

即 $\forall \phi \in \mathscr{S}_0$，$\exists\ \varphi_j \in \mathscr{S}_0$，使 $P^t[\varphi_j] \to \phi$. 证毕.

问题：是否存在 $j_0$，使 $\varphi_{j_0} \xrightarrow{w} \varphi$，$P^t$ 在 $\mathscr{S}$ 中可解？若 $P^t[\varphi] = \phi$，接下来将会有什么样的结果出来？

定理 8.6 提示从另外一个角度理解 Liouville 定理，需要考虑 $\mathscr{S}_0$ 的拓扑结构，这如何定义？$\mathscr{S}_0$ 是否完备？

### 8.4.2 一个多项式不等式

设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为 $k$ 次拟齐次多项式，定义

$$\langle f_1, f_2\rangle_k = \bar{f}_2(\partial) f_1(x) = f_1(\partial)\bar{f}_2(x)$$

**定理 8.7** 设 $p(x) \in \mathscr{P}_m$，$q(x) \in \mathscr{P}_k$，这里 $\mathscr{P}_m$，$\mathscr{P}_k$ 分别为 $m$ 和 $k$ 次拟齐次多项式全体，则

$$\| p(x)q(x) \|_{m+k} \geqslant \| p(x) \|_m \| q(x) \|_k \tag{8.40}$$

这里 $\| p(x) \|_m^2 = \langle p(x), p(x)\rangle_m = \bar{p}(\partial)p(x)$，其余范数类似定义.

**证明**

$$\begin{aligned} \| pq \|_{m+k}^2 &= \langle pq, pq\rangle_{m+k} = \\ & p(\partial)q(\partial)[\bar{p}(x)\bar{q}(x)] = \\ & p(\partial)\Big[\sum_{\alpha \leqslant k} \frac{q^{(\alpha)}(\partial)\bar{p}(x)}{\alpha!}\partial^\alpha \bar{q}(x)\Big] = \\ & \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant m}} \frac{p^{(\beta)}(\partial)(\partial^\alpha \bar{q}(x))}{\beta!\alpha!}[q^{(\alpha)}(\partial)(\partial^\beta \bar{p}(x))] \end{aligned} \tag{8.41}$$

因为 $p^{(\beta)}(\partial)$ 为 $m-a\cdot\beta$ 次拟齐性算子，$\partial^{\alpha}\bar{q}(x)$ 是 $k-a\cdot\alpha$ 次拟齐次多项式，所以 $p^{(\beta)}(\partial)\partial^{\alpha}\bar{q}(x)$ 为 $k-a\cdot\alpha-(m-a\cdot\beta)$ 次，从而当 $m-a\cdot\beta>k-a\cdot\alpha$ 时，$p^{(\beta)}(\partial)\partial^{\alpha}\bar{q}(x)=0$；同理可证：当 $m-a\cdot\beta<k-a\cdot\alpha$ 时，$q^{(\alpha)}(\partial)\partial^{\beta}\bar{p}(x)=0$，当 $m-a\cdot\beta=k-a\cdot\alpha$ 时，

$$p^{(\beta)}(\partial)\partial^{\alpha}\bar{q}(x)=\langle p^{(\beta)}(x),\partial^{\alpha}q(x)\rangle_{m-a\cdot\beta}$$

$$q^{(\alpha)}(\partial)\partial^{\beta}\bar{p}(x)=\langle q^{(\alpha)}(x),\partial^{\beta}p(x)\rangle_{m-a\cdot\beta}$$

从而

$$\|pq\|_{m+k}^{2}=\sum_{m-a\cdot\beta=k-a\cdot\alpha}\frac{|\langle p^{(\beta)}(x),q^{(\alpha)}(x)\rangle|^{2}}{\beta!\alpha!}\geqslant$$

$$\sum_{a\cdot\beta=m,a\cdot\alpha=k}\frac{|\beta!p_{\beta}\alpha!q_{\alpha}|^{2}}{\beta!\alpha!}=$$

$$\sum_{a\cdot\beta=m,a\cdot\alpha=k}\beta!|p_{\beta}|^{2}\alpha!|q_{\alpha}|^{2}=$$

$$\sum_{a\cdot\beta=m}\beta!|p_{\beta}|^{2}\sum_{a\cdot\alpha=k}\alpha!|q_{\alpha}|^{2}=$$

$$\|p\|_{m}^{2}\|q\|_{k}^{2}$$

证毕.

**应用**　设 $p\in\mathscr{P}_{m}$ 给定，考虑算子 $L_{p}[q]=p(\partial)[\bar{p}q]$，$\forall q\in\mathscr{P}_{k}$，

$$L_{p}:\mathscr{P}_{k}\rightarrow\mathscr{P}_{k}$$

作为零阶的偏微分算子是线性的，是自伴的（特征值实），正定的（特征值正），特征值有下界. 事实上，利用定理 8.7，有

$$\langle L_{p}[q],q\rangle k=\langle p(\partial)[\bar{p}q],q\rangle_{k}=$$

$$\langle\bar{p}q,\bar{p}q\rangle_{k+m}=$$

$$\|\bar{p}q\|_{k+m}^{2}=\|pq\|_{k+m}^{2}\geqslant$$

$$\|p\|_{m}^{2}\|q\|_{k}^{2}$$

式中 $p$ 已知，$q$ 变化. 若 $L_{p}[q_{0}]=\lambda q_{0}$，$\|q_{0}\|=1$，则

$$\lambda\geqslant\|p\|_{m}^{2},$$

这说明 $L_{p}$ 的特征值的所有下界是 $\|p\|_{m}^{2}$.

# 第九章　半线性拟齐性偏微分方程的Liouville型定理

本章 9.1 节证明与拟齐性 LPDO 相联系的半线性方程的 Liouville 型定理;9.2 节证明与平方和算子相联系的半线性方程的 Liouville 型定理;9.3 节考虑广义锥域上的类似结果.

## 9.1　半线性拟齐性方程

取区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$,本节研究半线性方程

$$Pu + f(x,u) \leqslant 0, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{9.1}$$

其中,非线性函数 $f(x,u)$,当 $u$ 趋于无穷大时,按照超线性多项式增长方式增长.称函数 $u$ 为方程式(9.1)的一个弱解,是指对每一个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,且 $\varphi \geqslant 0$,均有

$$\int_\Omega uP^t\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega f(x,u)\varphi \mathrm{d}x \leqslant 0$$

其中,$P^t$ 表示算子 $P$ 的转置.

本节的主要结论为:

**定理 9.1**　设算子 $P$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有光滑系数的 $m(m>0)$ 次拟齐性线性偏微分算子,如果 $K>0$,且下列三个条件之一成立

(1) $\gamma > -m,\quad m < Q,\quad 1 < p \leqslant \dfrac{Q+\gamma}{Q-m}$;

(2) $m > Q,\quad p > 1,\quad p \geqslant \dfrac{Q+\gamma}{Q-m}$;

(3) $m = Q,\quad Q \geqslant -\gamma,\quad p > 1$.

则方程

$$Pu + Kr(x)^{\gamma}u^{p} \leqslant 0, \quad 在 \mathbf{R}^n 中 \tag{9.2}$$

的唯一非负解 $u \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n) \cap C_0(\mathbf{R}^n)$ 必恒等于零.

注意到在定理 9.1 中,对算子没有亚椭圆性质要求.

取截断函数 $\zeta(0 \leqslant \zeta \leqslant 1)$ 满足

$$\zeta(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2} \\ 0, & \tau \geqslant 1 \end{cases}$$

取待定正数 $p'$ 和整数 $k \in \mathbf{N}$,令

$$\eta(\tau) = (\zeta(\tau))^{kp'}$$

当 $1 < p < p'$ 时,直接计算得

$$|\eta^{(l)}(\tau)|^{p} \leqslant C_{\eta}\eta^{p-1}(\tau), \quad l = 1,2,\cdots,k \tag{9.3}$$

其中,$C_{\eta}$ 为某个正常数(见参考文献[29,34]).事实上,

$$\begin{aligned} |\eta'(\tau)|^{p} &= |(kp')^{p}\zeta(\tau)^{(kp'-1)p}|\zeta'(\tau)|^{p}| \leqslant \\ &(kp')^{p}|\zeta(\tau)|^{kp'(p-1)}|\zeta(\tau)|^{kp'-p}|\zeta'(\tau)|^{p} \leqslant \\ &C_{\eta}\eta^{p-1}(\tau) \end{aligned}$$

其余类似估计.

记 $\omega_R = \{y : r(y) < R\}$ 为球域,令 $\varphi(y) = \eta(r(y)) \in C_0^{\infty}(\omega_1)$,常数 $p'$ 足够大.注意到 $r(y) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$,因而 $r(y)$ 及其各阶导数在 $\frac{1}{2} < r(y) < 1$ 内均有界,故而

$$\begin{cases} |\partial_{y_i}\varphi(y)| = |\partial_{y_i}\eta(r(y))| = |\eta'\partial_{y_i}r(y)| \leqslant \\ \qquad C|\eta'|, i = 1,2,\cdots,n \\ |\partial_{y_iy_j}\varphi(y)| = |\eta''\partial_{y_i}r(y)\partial_{y_i}r(y) + \eta'\partial_{y_iy_j}r(y)| \leqslant \\ \qquad C(|\eta'| + |\eta''|), i,j = 1,2,\cdots,n \\ \cdots\cdots \\ |\partial_y^{\beta}\varphi(y)| \leqslant C\sum_{i=1}^{|\beta|}|\eta^{(i)}|, \quad \beta \in I_+^n \end{cases} \tag{9.4}$$

**引理 9.1**　积分

$$\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}(r(y)^{\gamma}\varphi(y))^{\frac{q}{p}}\,|P^t\varphi|^q\mathrm{d}y \tag{9.5}$$

有限，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

**证明**　由具有光滑系数的拟齐性线性偏微分算子的性质有

$$P^t=\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m,\,|\beta|\leqslant N}a_{\alpha,\beta}y^{\alpha}\partial^{\beta}$$

其中，$N$ 为算子 $P^t$ 的阶数. 当$\frac{1}{2}<r(y)<1$ 时，由式(9.4)，有

$$|P^t\varphi|\leqslant\sum_{\substack{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m\\|\beta|\leqslant N}}|a_{\alpha,\beta}||y|^{\alpha}\Big(C\sum_{i=1}^{|\beta|}|\eta^{(i)}|\Big)\leqslant$$

$$C\sum_{i=1}^{N}|\eta^{(i)}|\sum_{\substack{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m\\|\beta|\leqslant N}}|y|^{\alpha}$$

其中 $|y|^{\alpha}=|y_1|^{\alpha_1}\cdots|y_n|^{\alpha_n}$，从而

$$\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}(r(y)^{\gamma}\varphi(y))^{-\frac{q}{p}}\,|P^t\varphi|^q\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}(r(y)^{\gamma}\varphi(y))^{-\frac{q}{p}}\Big|C\sum_{i=1}^{N}|\eta^{(i)}|\sum_{\substack{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m\\|\beta|\leqslant N}}|y|^{\alpha}\Big|^q\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}(r(y)^{\gamma}\varphi(y))^{-\frac{q}{p}}\,|\eta^{(i)}|^q\Big|\sum_{\substack{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m\\|\beta|\leqslant N}}|y|^{\alpha}\Big|^q\mathrm{d}y=$$

$$C\sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}r(y)^{-\frac{\gamma q}{p}}\,\frac{|\eta^{(i)}|^q}{\eta^{\frac{q}{p}}}\Big|\sum_{\substack{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m\\|\beta|\leqslant N}}|y|^{\alpha}\Big|^q\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}r(y)^{-\frac{\gamma q}{p}}\Big|\sum_{\substack{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m\\|\beta|\leqslant N}}|y|^{\alpha}\Big|^q\mathrm{d}y<+\infty \tag{9.6}$$

这里用到式(9.3). 证毕.

定理 9.1 的证明：对某个 $R>0$，令 $\Phi_R(x)=\varphi\circ\delta_{\frac{1}{R}}(x)$，显然 $P^t\Phi_R=P^t(\varphi\circ\delta_{\frac{1}{R}})=R^{-m}(P^t\varphi)\circ\delta_{\frac{1}{R}}$. 考虑积分

$$I_R:=\int_{\mathbf{R}^n}r(x)^{\gamma}u^p\Phi_R\mathrm{d}x \tag{9.7}$$

结合 Hölder 不等式和引理 9.1 可知

$$I_R \leqslant \frac{1}{K}\int_{\mathbf{R}^n}(-Pu)\Phi_R \mathrm{d}x = -\frac{1}{K}\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} uP^t\Phi_R \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{K}\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u(r(x)^\gamma\Phi_R)^{\frac{1}{p}}(r(x)^\gamma\Phi_R)^{-\frac{1}{p}}P^t\Phi_R \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{1}{K}\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u^p r(x)^\gamma \Phi_R \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R}(r(x)^\gamma\Phi_R)^{-\frac{q}{p}}\mid P^t\Phi_R\mid^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \xlongequal{\left(\text{这里用到}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)}$$

$$\frac{1}{K}\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u^p r(x)^\gamma \Phi_R \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1}(r(y)^\gamma\varphi(y))^{-\frac{q}{p}}\mid P^t\varphi(y)\mid^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} R^{-\frac{\gamma}{p}-m+\frac{Q}{q}} =$$

$$C\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u^p r(x)^\gamma \Phi_R \mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{p}} R^{-\frac{\gamma}{p}-m+\frac{Q}{q}} \tag{9.8}$$

当 $\gamma > -m, m < Q, 1 < p < \frac{Q+\gamma}{Q-m}$ 时,有

$$-\frac{\gamma}{p} - m + \frac{Q}{q} = Q - m - \frac{1}{p}(Q+\gamma) < 0 \tag{9.9}$$

从式(9.8) 可得

$$\int_{\mathbf{R}^n} r(x)^\gamma u^p \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^n} r(x)^\gamma u^p \Phi_R \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} I_R = 0$$

另外,如果 $\gamma > -m, m < Q, 1 < p = \frac{Q+\gamma}{Q-m}$,则由式(9.8) 可得

$$I_R \leqslant C\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u^p r(x)^\gamma \Phi_R \mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

显然不等式右边积分收敛于零,从而 $I_R$ 也收敛于零,即在条件(1) 下结论成立.

同理可在条件(2) 或(3) 下用式(9.9) 证明结论成立. 证毕.

作为定理 9.1 的应用,考虑热算子

$$P(\partial) = \partial_n - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2, \quad n = 1,2\cdots$$

其中 $\partial_j^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, j = 1, \cdots, n-1, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$. 则算子 $P(\partial)$ 关于伸缩族 $\delta_\tau(x) = (\tau x_1, \cdots, \tau x_{n-1}, \tau^2 x_n)$ 是二次拟齐性的. 设非负函数 $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap C_0(\mathbf{R}^n)$ 为方程

$$P(\partial)u + Kr(x)^\gamma u^p \leqslant 0, \quad 在 \mathbf{R}^n 中$$

的解,如果下列条件

(1) $K > 0, \gamma > -2, Q > 2$ 和 $1 < p \leqslant \frac{Q+\gamma}{Q-2}$

(2) $K > 0, Q = 2, Q \geqslant -\gamma$ 和 $p > 1$

(其中 $Q = n+1$) 之一成立,则 $u \equiv 0$.

## 9.2 平方和算子的半线性方程

令 $X_j (j = 1, \cdots, k)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有光滑系数的一次拟齐次向量场,且由这些向量场通过 Lie 括号生成的 Lie 代数在原点处为满秩的. 令 $L = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$. 显然 $L$ 为 2 次拟齐性算子.

**定理 9.2** 设方程

$$Lu + f(x,u) \leqslant 0, \quad 在 \mathbf{R}^n 中 \tag{9.10}$$

存在一个非负解 $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap C_0(\mathbf{R}^n)$,其中非负函数 $f$ 满足

$$f(x,u) \geqslant h(x)u^p \tag{9.11}$$

函数 $h \geqslant 0$,且当 $r(x)$ 足够大时,

$$h(x) \geqslant Kr(x)^\gamma, \quad K > 0, \quad \gamma > -2 \tag{9.12}$$

如果 $1 < p \leqslant \frac{Q+\gamma}{Q-2}, Q > 2$,则 $u \equiv 0$.

**证明** 记

$$I_R := \int_{\mathbf{R}^n} u^p h \Phi_R \mathrm{d}x \tag{9.13}$$

其中 $\Phi_R$ 的选取如定理 9.1 的证明中选取. 由式(9.10)、式(9.11)和 Hölder 不等式导出

$$\begin{aligned}
I_R &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} -Lu\Phi_R \mathrm{d}x = -\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} uL^t\Phi_R \mathrm{d}x = \\
&-\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u(h\Phi_R)^{\frac{1}{p}}(h\Phi_R)^{-\frac{1}{p}}L^t\Phi_R \mathrm{d}x \leqslant \\
&\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u^p h\Phi_R \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \\
&\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} (h\Phi_R)^{-\frac{q}{p}} \mid L^t\Phi_R \mid^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{9.14}$$

其中，$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. 因为假设式(9.12)，所以当 $R$ 足够大时，

$$\begin{aligned}
(I_R)^{1-\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} (h\Phi_R)^{-\frac{q}{p}} \mid L^t\Phi_R \mid^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\
&K^{-\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} (r(x)^\gamma\Phi_R)^{-\frac{q}{p}} \mid L^t\Phi_R \mid^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = \\
&K^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}<r(y)<1} (r(y)^\gamma\varphi(y))^{-\frac{q}{p}} \mid L^t\varphi \mid^q \mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{q}} \cdot R^{-\frac{\gamma}{p}-2+\frac{Q}{q}}
\end{aligned} \tag{9.15}$$

引理 9.1 表明式(9.15) 等号右边之积分可积，所以由式(9.15)导出

$$(I_R)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant CR^{-\frac{r}{p}-2+\frac{Q}{q}} \tag{9.16}$$

当 $1<p<\frac{Q+\gamma}{Q-2}$ 时，有

$$-\frac{\gamma}{p}-2+\frac{Q}{q}=-\frac{\gamma}{p}-2+(1-\frac{1}{p})Q=Q-2-\frac{1}{p}(Q+\gamma)<0$$

令 $R\to\infty$，则

$$\int_{\mathbf{R}^n} u^p h\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} u^p h\Phi_R \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} I_R = 0$$

当 $p=\frac{Q+\gamma}{Q-2}$ 时，由式(9.16) 可知 $I_R$ 有界，且不等式(9.14)

表明

$$I_R \leqslant C\left(\int_{\frac{R}{2}<r(x)<R} u^p h \Phi_R \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

显然上式不等号右边积分收敛于零,故而 $I_R$ 也收敛于零.

由函数 $h$ 的条件知,存在常数 $R>0$,

$$\begin{cases} u \equiv 0, & r(x) \geqslant R \\ Lu \leqslant 0, u \geqslant 0, & r(x) \leqslant R \end{cases} \tag{9.17}$$

因为由向量场 $\{X_j, j=1,\cdots,k\}$ 生成的 Lie 代数在原点处的维数为 $n$,所以存在常数 $\varepsilon>0$,使得在领域 $\omega_\varepsilon$ 中每一点处的 Lie 代数均满秩,则 Bony(见参考文献[8])的极大值原理表明:如果函数 $v$ 满足

$$\begin{cases} Lv \leqslant 0, & \text{在 } \omega_\varepsilon \text{ 中} \\ v \geqslant 0, & \text{在 } \omega_\varepsilon \text{ 中} \\ v = 0, & \text{在 } \partial\omega_\varepsilon \text{ 上} \end{cases} \tag{9.18}$$

则 $v \equiv 0$. 令 $V(x) = u \circ \delta_{\frac{R}{\varepsilon}}(x)$,式(9.17) 表明 $V(x)$ 满足方程式(9.18),所以

$$V(x) \equiv 0, \quad \text{在 } r(x) < \varepsilon \text{ 中} \tag{9.19}$$

即

$$u(x) \equiv 0, \quad \text{在 } r(x) < R \text{ 中} \tag{9.20}$$

综合式(9.17) 中第一式与式(9.20),知 $u(x) \equiv 0$. 证毕.

## 9.3 广义锥域上的 Liouville 型定理

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为一个区域,称 $\Omega$ 为广义锥域,是指如果 $x \in \Omega$,则

$$\delta_\tau(x) \in \Omega, \quad \forall \tau > 0$$

特别,任取 $i, 1 \leqslant i \leqslant n$,区域 $\{x : x_i > 0\}$ 均为广义锥域.

令函数空间 $H(\Omega, h, P)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\| u \|_{h,P} = \int_\Omega |u|^p |h| \mathrm{d}x + \int_\Omega |Pu| \mathrm{d}x$$

下的闭包，其中 $P$ 为具有光滑系数的 LPDO，$p>1$ 为常数，$h$ 为某个待定的权函数.

设 $\Omega$ 为广义锥域. 任取一个具有光滑系数的拟齐性线性偏微分算子 $P$，有

**定理 9.3**　设 $u \in H(\Omega, r(x)^{\gamma}, P) \cap C(\bar{\Omega})$ 为式(9.2)的一个非负弱解，如果定理 9.1 中的条件(1) ~ (3) 之一成立，则 $u \equiv 0$.

**证明**　由稠密性，存在函数列 $\{v_n\} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $H(\Omega, r(x)^{\gamma}, P)$ 中收敛于 $u$，所以

$$I_R = \int_{\Omega} u^p r(x)^{\gamma} \Phi_R \mathrm{d}x \leqslant -C\int_{\Omega} Pu\Phi_R \mathrm{d}x = C \lim_{n\to\infty}\left(-\int_{\Omega} Pv_n \Phi_R \mathrm{d}x\right)$$

沿定理 9.1 的证明思路，容易得到

$$-\int_{\Omega} Pv_n\Phi_R \mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\left(\int_{\{\frac{R}{2}<r(x)<R\}\cap\Omega} v_n^p r(x)^{\gamma}\Phi_R \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} R^{\frac{\gamma}{p}-m+\frac{Q}{q}} \to$$

$$C\left(\int_{\{\frac{R}{2}<r(x)<R\}\cap\Omega} u^p r(x)^{\gamma}\Phi_R \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} R^{\frac{\gamma}{p}-m+\frac{Q}{q}}, \quad n\to+\infty$$

重复定理 9.1 的推导过程，就完成本定理的证明.

**注 9.1**　欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 Liouville 型定理得到了广泛的研究，如 Berestycki-Capuzzo Dolcetta-Nirenberg[3-4]，Hamidi-Laptev[29]，Laptev[34] 等人的研究. 最近，对线性及非线性亚椭圆方程的 Liouville 型定理的研究也有了许多新的结果，如 Luo[36]，Birindelli-Capuzzo Dolcetta-Cutri[5-6]，Bonfiglioli-Lanconelli[7] 等人的研究结果.

# 第十章　解析亚椭圆拟齐性 LPDO

本章 10.1 节介绍解析和全纯函数的几个已知结果；10.2 节论述并证明拟齐性 LPDO 的解析亚椭圆性.

## 10.1　预备知识

**定义 10.1**　设 $x_0 \in \mathbf{R}^n$，函数 $f(x)$ 称为在 $x_0$ 解析，若存在 $r > 0$，当 $|x - x_0| < r$ 时，有

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{\partial_x^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \tag{10.1}$$

通常称为实解析. 设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 为开集，若 $f$ 在 $U$ 的每一点解析，则称 $f$ 在 $U$ 解析.

**定义 10.2**　设 $z^0 = (z_1^0, \cdots, z_n^0) \in \mathbf{C}^n$，称函数 $f(z) = f(z_1, \cdots, z_n)$ 在 $z^0$ 是全纯的，若存在 $r > 0$，当 $|z - z^0| < r$ 时，有

$$f(z) = \sum_{\alpha} \frac{\partial_z^\alpha f(z^0)}{\alpha!}(z - z^0)^\alpha \tag{10.2}$$

规定：$\partial_z^\alpha = \partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n}$，$z_j = x_j + \mathrm{i} y_j$，$\dfrac{\partial}{\partial z_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$. 若 $f$ 在开集 $U$ 中每一点全纯，则称 $f$ 在 $U$ 中全纯.

**引理 10.1**　$f(z)$ 在开集 $U$ 中全纯的必要充分条件是 $f \in C(U)$ 且

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{10.3}$$

式(10.3) 称为 Cauchy-Riemann 条件.

**注 10.1**　显然，$f$ 全纯 $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = -\mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y_j} \Rightarrow \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial y_j}$.

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y_j}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

**引理 10.2(Cauchy 不等式)**　设 $f(z)$ 在开集 $U \subset \mathbf{R}^n$ 中全纯，且 $|f(z)| < M$，则对任意紧集 $K \subset U$，当 $x \in K$ 时，有

$$|\partial_z^\alpha f(z)| \leqslant M\alpha!\delta^{-|\alpha|} \tag{10.4}$$

其中 $\delta$ 是 $K$ 到 $\partial U$ 的距离.

特别地，若 $U$ 是开球，$K$ 是 $U: |z - z^0| < R$ 的圆心 $z^0$，则

$$|\partial_z^\alpha f(z)| \leqslant M\alpha!R^{-|\alpha|}$$

**引理 10.3(延拓的唯一性定理)**　设 $U$ 是 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)中的连通开集，$f$ 在 $U$ 中解析(或全纯)，若存在 $x^0$(或 $z^0$) $\in U$ 满足

$$\partial_x^\alpha f(x^0) = 0 (\text{或 } \partial_z^\alpha f(z^0) = 0), \quad \forall \alpha \in I_+^n$$

则 $f$ 在 $U$ 中恒为 0. 特别地，如果 $U$ 中解析(或全纯)函数 $f$ 在 $U$ 的非空开子集 $U'$ 中恒为零，则 $f$ 在 $U$ 中恒为零.

对 $C^\infty$ 函数则无此性质，如 $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

## 10.2　拟齐性 LPDO 的整解析性

**定义 10.3**　设 $P$ 为具有解析系数的 LPDO，称 $f$ 在 $x^0$ 的某邻域中是解析亚椭圆的，若

$u \in \mathscr{D}'$，$Pu$ 在 $\omega(x^0)$ 中解析 $\Rightarrow u$ 在 $\omega(x^0)$ 中解析

即

$$Pu \text{ 在 } x^0 \text{ 解析} \Rightarrow u \text{ 在 } x^0 \text{ 中解析}$$

设 $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，对任意紧集 $K$，存在整数 $k = k(K)$ 及 $C(K) > 0$ 使

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant C(K) \sup_{|\alpha| \leqslant k, x \in K} |\partial^\alpha \phi|, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(K) \tag{10.5}$$

如果 $k$ 与 $K$ 无关，则称 $u$ 为有限阶广义函数.

**定理 10.1** 设 $P(x,\partial)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有 $C^\infty$ 系数的拟齐性 LPDO,且 $P(x,\partial)$ 在 $x=0$ 是解析亚椭圆的.若 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 是有限阶的,满足 $Pf\equiv 0$(在 $\mathbf{R}^n$ 上),则存在一个 $\mathbf{C}^n$ 上的整函数(即在整个空间上解析或其展式的收敛半径为无穷大)$F(z)$,满足 $P[F(x)]=0$,并且 $F(x)=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域中恒成立.

**证明** 因为 $P(x,\partial)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $\omega_b=\{x:|x|<b\}$ 中是解析亚椭圆的,$Pf=0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上,所以,$f$ 在 $\omega_b$ 中解析:

$$f(x)=\sum_\alpha\frac{\partial_x^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha$$

令 $F(z)=\sum\limits_\alpha\dfrac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}z^\alpha$,当 $|z|<\dfrac{b}{2}$ 时,其等号右边级数收敛.下面构造 $h(\tau)$,使 $\partial^\alpha f(0)$ 趋于零的速度快到足以使 $F(z)$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中收敛.

为了估计 $\partial^\alpha f(0)$,需要构造 $g$.因为 $f$ 是有限阶的广义函数,所以对任意 $\tau>0$,$\Omega_\tau=\{x:r(x)<\tau\}$,存在 $C(\tau)>0$,$k$(与 $\tau$ 无关),使得 $\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega_\tau)$,

$$|\langle f,\phi\rangle|\leqslant C(\tau)\sup_{|\beta|\leqslant K,x\in\Omega_\tau}|\partial^\beta\phi(x)| \tag{10.6}$$

不失一般性,可认为 $C(\tau)$ 是 $\tau$ 的单增连续函数.否则,令 $C_j=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant j}\{C(\tau_l)\}$,取

$$C^*(\tau)=\begin{cases}C_1, & 0<\tau\leqslant\tau_1\\ \dfrac{C_{j+2}-C_{j+1}}{\tau_{j+1}-\tau_j}(\tau-\tau_{j+1})+C_{j+1}, & \tau_j<\tau\leqslant\tau_{j+1}\end{cases}$$

$\tau\nearrow+\infty$,则 $C(\tau)\leqslant C^*(\tau)$,且 $C^*(\tau)$ 递增.

定义 $g$ 为:$\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega_1)$,

$$\langle g,\phi\rangle=\int_1^\infty\langle f,\phi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}\rangle\tau^{-|a}E(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{10.7}$$

其中,$E(\tau)=\mathrm{e}^{-\tau-\int_0^\tau C(s)\mathrm{d}s}$.显然 $E(\tau)$ 关于 $\tau$ 递减.

首先证明 $g\in\mathscr{D}'(\Omega_1)$.从 $\phi\in C_0^\infty(\Omega_1)$ 知 $\phi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}(x)\in$

$C_0^\infty(\Omega_\tau)$，所以利用式(10.6)有

$$|\langle g,\phi\rangle|\leqslant\int_1^\infty C(\tau)\sup_{|\beta|\leqslant k}|\partial^\beta(\phi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}})|\tau^{-|a|}E(\tau)\mathrm{d}\tau$$

因为 $\sup\limits_{|\beta|\leqslant k}|\partial^\beta(\phi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}(x))|=\tau^{-a\cdot\beta}\sup\limits_{|\beta|\leqslant k,x\in\Omega_1}|\partial^\beta\phi|$，所以

$$|\langle g,\phi\rangle|=\sup_{|\beta|\leqslant k,x\in\Omega_1}|\partial^\beta\phi|\int_1^\infty\tau^{-|a|-a\cdot\beta}C(\tau)\mathrm{e}^{-\tau-\int_0^\tau C(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\sup_{|\beta|\leqslant k,x\in\Omega_1}|\partial^\beta\phi|\int_1^\infty\tau^{-|a|-a\cdot\beta}(C(\tau)+1)\mathrm{e}^{-\tau-\int_0^\tau C(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau=$$

$$\sup_{|\beta|\leqslant k,x\in\Omega_1}|\partial^\beta\phi|\cdot(-1)\int_1^\infty\tau^{-|a|-a\cdot\beta}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\tau-\int_0^\tau C(s)\mathrm{d}s}=$$

$$\sup_{|\beta|\leqslant k,x\in\Omega_1}|\partial^\beta\phi|\Big(-\tau^{-|a|-a\cdot\beta}\mathrm{e}^{-\tau-\int_0^\tau C(s)\mathrm{d}s}\Big|_1^\infty+$$

$$\int_1^\infty(-|a|-a\cdot\beta)\tau^{-|a|-a\cdot\beta-1}\mathrm{e}^{-\tau-\int_0^\tau C(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau\Big)\leqslant$$

$$\sup_{|\beta|\leqslant k}|\partial^\beta\phi|\,\mathrm{e}^{-1-\int_0^1 C(s)\mathrm{d}s}<+\infty$$

所以 $g\in\mathscr{D}'(\Omega_1)$.

下面证明在 $\Omega_1$ 中 $P[g]=0$. 事实上，$\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega_1)$，注意到 $Pf=0$，有

$$\langle P[g],\phi\rangle=\langle g,P^t[\phi]\rangle=$$

$$\int_1^\infty\langle f,P^t[\phi]\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}\rangle\tau^{-|a|}E(\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$\int_1^\infty\langle f,P^t[\phi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}]\rangle\tau^{m-|a|}E(\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$\int_1^\infty\langle P[f],\phi\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}\rangle\tau^{m-|a|}E(\tau)\mathrm{d}\tau\equiv 0$$

由 $P$ 的解析亚椭圆性，$g$ 在 $\omega_b$ 中解析.

现在证明：

$$\partial^a g(0)=\partial^a f(0)\int_1^\infty\tau^{a\cdot a}E(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{10.8}$$

取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$，$\varphi\geqslant 0$，$\int_{\Omega_1}\varphi\mathrm{d}x=1$. 令 $\varphi_\varepsilon=\varepsilon^{-|a|}\varphi\circ\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}$，

则 $\forall h \in C^{\infty}(\omega_b)$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle h,\varphi_\varepsilon\rangle = h(0),\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \partial^\alpha h,\varphi_\varepsilon\rangle = \partial^\alpha h(0)$$

所以，从式(10.7)有

$$\partial^\alpha g(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \partial^\alpha g,\varphi_\varepsilon\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle g,(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi_\varepsilon\rangle =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^\infty \langle f,((-\partial)^\alpha\varphi_\varepsilon)\circ\delta_{\frac{1}{\tau}}\rangle\tau^{|\alpha|}E(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^\infty \langle f,(-\partial)^\alpha(\varphi_\varepsilon\circ\delta_{\frac{1}{\tau}})\rangle\tau^{a\cdot\alpha-|\alpha|}E(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^\infty \langle \partial^\alpha f,\varphi_{\varepsilon\tau}\rangle\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \langle \partial^\alpha f,\varphi_{\varepsilon\tau}\rangle\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau +\right.$$

$$\left.\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \langle \partial^\alpha f,\varphi_{\varepsilon\tau}\rangle\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_1 + I_2)$$

首先考虑 $I_2 = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \langle \partial^\alpha f,\varphi_{\varepsilon\tau}\rangle\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau$. 此时，因为 $\tau < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，所以

$\varepsilon\tau < \sqrt{\varepsilon}\to 0(\varepsilon\to 0)$，从而

$$I_2 \to \int_1^{+\infty} \partial^\alpha f(0)\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau(\varepsilon\to 0) \tag{10.10}$$

对 $I_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} \langle \partial^\alpha F,\varphi_{\tau\varepsilon}\rangle\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau$，注意到

$$\langle \partial^\alpha f,\varphi_{\tau\varepsilon}\rangle = \langle f,(-\partial)^\alpha\varphi_{\tau\varepsilon}\rangle =$$

$$\langle f,(-\partial)^\alpha[\frac{1}{(\tau\varepsilon)^{|\alpha|}}\varphi\circ\delta_{\frac{1}{\tau\varepsilon}}]\rangle =$$

$$\langle f,[(-\partial)^\alpha\varphi]\circ\delta_{\frac{1}{\tau\varepsilon}}\rangle(\tau\varepsilon)^{-|\alpha|-a\cdot\alpha}$$

且由 $\tau > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 得 $\tau\varepsilon > \frac{1}{\tau}$，所以

$$|\langle \partial^\alpha f,\varphi_{\tau\varepsilon}\rangle| \leqslant |\langle f,[(-\partial)^\alpha\varphi]\circ\delta_{\frac{1}{\tau\varepsilon}}\rangle|\tau^{|\alpha|+a\cdot\alpha} \leqslant$$

$$C(\tau\varepsilon)\sup_{\beta\leqslant k,x\in\Omega_{\tau\varepsilon}}|\partial^{\beta}(\partial^{\alpha}\varphi\circ\delta_{\frac{1}{\tau\varepsilon}})|\tau^{|\alpha|+a\cdot\alpha}\leqslant$$

$$C(\tau)\sup_{|\gamma|\leqslant k+|\alpha|,x\in\Omega_1}|\partial^{\gamma}\varphi|\tau^{|\alpha|+a\cdot\alpha+a\cdot\beta}$$

这里用到式(10.6).从而

$$|I_1|\leqslant\sup_{\substack{|\gamma|\leqslant k+|\alpha|\\ x\in\Omega_1}}|\partial^{\gamma}\varphi|\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty}\tau^{2a\cdot\alpha+a\cdot\beta+|\alpha|}\mathrm{e}^{-\tau}C(\tau)\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau}C(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau$$

当 $\tau$ 充分大时，$\tau^{2a\cdot\alpha+a\cdot\beta+|\alpha|}\mathrm{e}^{-\tau}$ 递减，所以

$$|I_1|\leqslant\sup_{\substack{|\gamma|\leqslant k+|\alpha|\\ x\in\Omega_1}}|\partial^{\gamma}\varphi|\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^{2a\cdot\alpha+a\cdot\beta+|\alpha|}\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty}C(\tau)\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau}C(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\sup_{\substack{|\gamma|\leqslant k+|\alpha|\\ x\in\Omega_1}}|\partial^{\gamma}\varphi|\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^{2a\cdot\alpha+a\cdot\beta+|\alpha|}\cdot\int_0^{\infty}[-\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau}C(s)\mathrm{d}s})]\to 0(\varepsilon\to 0)$$

$$(10.11)$$

至此，从式(10.10)及式(10.11)有式(10.8)成立.

下面估计 $\int_1^{\infty}\tau^{a\cdot\alpha}E(\tau)\mathrm{d}\tau$. 令 $I(\mu)=\int_1^{\infty}\tau^{\mu}E(\tau)\mathrm{d}\tau$，当 $\lambda>\tau$，$\lambda\geqslant 2$ 时，

$$I(\mu)\geqslant\int_1^{\lambda}\tau^{\mu}E(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant E(\lambda)\int_1^{\lambda}\tau^{\mu}\mathrm{d}\tau=$$

$$E(\lambda)\frac{\lambda^{\mu+1}-1}{\mu+1}>E(\lambda)\frac{\lambda^{\mu+1}}{2(\mu+1)}=$$

$$\frac{\lambda^{\mu+1}}{2(\mu+1)}\mathrm{e}^{-\lambda-\int_0^{\lambda}C(s)\mathrm{d}s}:=J(\mu,\lambda)\qquad(10.12)$$

求 $\lambda^*$ 使 $J(\mu,\lambda)\geqslant J(\mu,\lambda^*)$，则

$$\left.\frac{\partial J(\mu,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^*}=0$$

从而 $\mu+1=\lambda^*(1+C(\lambda^*))$，$\lambda^*=\lambda^*(\mu)$，所以

$$I(\mu)\geqslant J(\mu,\lambda^*)=\frac{(\lambda^*)^{\mu+1}}{2(\mu+1)}\mathrm{e}^{-\lambda^*-\lambda^*C(\lambda^*)}=\frac{1}{2(\mu+1)}(\frac{\lambda^*}{\mathrm{e}})^{\mu+1}$$

$$(10.13)$$

取 $\mu=a\cdot\alpha$，令 $\lambda_{\alpha}=\lambda^*(a\cdot\alpha)$，则

$$I(a \cdot \alpha) \geqslant \frac{1}{2(a \cdot \alpha + 1)} \left( \frac{\lambda^{*}(a \cdot \alpha)}{\mathrm{e}} \right)^{a \cdot \alpha + 1} \geqslant$$

$$\frac{1}{2(a \cdot \alpha + 1)} \left( \frac{\lambda_{\alpha}}{\mathrm{e}} \right)^{a_{*} \cdot \alpha| + 1} \geqslant$$

$$C \left( \frac{\lambda_{\alpha}}{\mathrm{e}} \right)^{a_{*} \cdot \alpha} \tag{10.14}$$

故由式(10.8)，并对 $g$ 用引理 10.2 得

$$| \partial^{\alpha} f(0) | \leqslant C' \left( \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{\alpha}} \right)^{a_{*} \cdot \alpha} | \partial^{\alpha} g(0) | \leqslant C'' \left( \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{\alpha}} \right)^{a_{*} \cdot |\alpha'} \alpha !$$

即

$$\left| \frac{\partial^{\alpha} f(0)}{\alpha !} \right| \leqslant C'' \left[ \left( \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{\alpha}} \right)^{a_{*}} \right]^{\alpha} \tag{10.15}$$

设 $|z| < R$，则有

$$\left| \frac{\partial^{\alpha} f(0)}{\alpha !} z^{\alpha} \right| \leqslant C'' \left( R \left( \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{\alpha}} \right)^{a_{*}} \right)^{\alpha}$$

取 $R$ 使 $\varepsilon_1 := R \left( \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{\alpha}} \right)^{a_{*}} < 1$，则

$$\sum_{\alpha} \left( R \left( \frac{\mathrm{e}}{\lambda_{\alpha}} \right)^{a_{*}} \right)^{\alpha} = \sum \varepsilon_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \leqslant$$

$$\sum_{\alpha_1 = 0}^{\infty} \varepsilon_1^{\alpha_1} \sum_{\alpha_2 = 0}^{\infty} \varepsilon_1^{\alpha_2} \cdots \sum_{\alpha_n = 0}^{n} \varepsilon_1^{\alpha_n} = \left( \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \right)^{n}$$

所以 $F(z) = \sum \frac{\partial^{\alpha} f(0)}{\alpha !} z^{\alpha}$ 在 $|z| < R$ 中收敛，$F(x)$ 和 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域中重合.

因为 $P(x, \partial_x) = \sum_{a \cdot \beta - a \cdot \alpha = m} a_{\alpha, \beta} x^{\alpha} \partial_x^{\beta}$，令 $P(z, \partial_z) = \sum_{a \cdot \beta - a \cdot \alpha = m} a_{\alpha, \beta} z^{\alpha} \partial_z^{\beta}$，$G(z) = P(z, \partial_z) F(z)$. 由 $F(z)$ 为整函数可知 $G(z)$ 为全纯函数，由注 10.1 可知

$$G(x) = P(x, \partial_x) F(x) = P(x, \partial_x) f(x)$$

在 $x = 0$ 的某邻域中成立，且此时 $G(x) = 0$，从而由唯一解析延拓定理(引理 10.3) 有

$$G(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

即

$$P(x,\partial_x)F(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

证毕.

**定理 10.2**　设 $P$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有 $C^\infty$ 系数的 $m$ 次拟齐性 LPDO，且具有性质：存在 $x = 0$ 的某邻域 $\omega$，使得“$u \in \mathscr{D}'(\omega)$，$Pu = 0$”⇒“$u$ 在 $\omega$ 中解析”，则：$u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$Pu = 0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中 ⇒ $u$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的解析函数，且可延拓为 $\mathbf{C}^n$ 上的整函数.

**证明**　设 $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$Pf = 0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上，则 $f$ 在 $\omega$ 中解析，且存在 $r_0$，使 $f$ 在 $\Omega_{r_0} = \{r(x) < r_0\} \subset \omega$ 中解析. 令 $f_\tau = f \circ \delta_\tau$，$\tau > 1$，则 $P[f \circ \delta_\tau] = \tau^m P[f] \circ \delta_\tau \equiv 0$，所以 $f_\tau$ 在 $\Omega_{r_0}$ 中解析. 又因为 $f(x) = f_\tau \circ \delta_{\frac{1}{\tau}}$，所以 $f$ 在 $\Omega_{\tau r_0}$ 中解析. 因为 $\tau > 0$ 任意，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中解析. 另外，$\phi \in C_0^\infty$，

$$|< f,\phi >| \leqslant \sup_K |\phi| \int_K |f| \, \mathrm{d}x \leqslant C(K) \sup_K |\phi|$$

从而 $f$ 为有限阶的，由定理 10.1 证得 $f$ 可延拓至整个 $\mathbf{C}^n$ 上. 证毕.

# 第十一章　拟齐性 LPDO 在多项式空间的可解性

本章内容包括引进拟齐次多项式空间及相应的内积空间；证明拟齐性 LPDO 多项式可解的充要条件；研究拟齐性 LPDO 多项式可解的右逆性质.

## 11.1　问题的提出

用 $\mathscr{P}$表示在复数域上的线性空间，它由 $\mathbf{R}^n$ 上的所有多项式构成. 设 $P(x,\partial)$ 为线性偏微分算子，其系数属于 $\mathscr{P}$，显然 $P(x,\partial)$ 是一个从 $\mathscr{P}$到 $\mathscr{P}$的映射. 自然地引入下列概念.

对 $f \in \mathscr{P}$，方程

$$P(x,\partial)u = f \tag{11.1}$$

是 $\mathscr{P}$-可解的，是指存在 $u \in \mathscr{P}$满足方程式(11.1). 算子 $P(x,\partial)$ 是 $\mathscr{P}$-可解的，是指对任意的 $f \in \mathscr{P}$，方程式(11.1) 都 $\mathscr{P}$-可解，也就是 $P(x,\partial): \mathscr{P} \to \mathscr{P}$是一个满射.

由于多项式的重要性，建立 LPDO 的 $\mathscr{P}$-可解性理论是很有意义的，而且也是必要的. 但是，至今为止还没有见到相关的理论. 本章的目的是针对拟齐性线性偏微分算子的情形建立 $\mathscr{P}$-可解性理论.

在第七章中曾证明：一个具有光滑系数的线性偏微分算子 $P(x,\partial)$ 是 $m$ 次拟齐性的，当且仅当 $P(x,\partial)$ 能唯一地表示为

$$P(x,\partial) = \sum_{a\cdot\beta - a\cdot\alpha = m} a_{\alpha,\beta} x^{\alpha} \partial^{\beta} \tag{11.2}$$

其中系数 $a_{\alpha,\beta}$ 都是常数，$a\cdot\alpha=\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_j$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in I_+^n$. 于是可以定义 $\bar{P}(\partial,x)$ 如下

$$\bar{P}(\partial,x)=\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=-m}\bar{a}_{\beta,\alpha}x^{\alpha}\partial^{\beta} \tag{11.3}$$

其中 $\bar{a}_{\beta,\alpha}$ 表示 $a_{\beta,\alpha}$ 的共轭数. 不难看出 $\bar{P}(\partial,x)$ 是 $-m$ 次拟齐次的.

本章的主要结果如下：$P(x,\partial)$ 是 $\mathscr{P}$-可解的，当且仅当算子 $\bar{P}(\partial,x)$ 是映 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{P}$ 的单射(见定理 11.1).

由此结果可以看出：任意具有常系数的非平凡拟齐性 LPDO P(∂) 总是 $\mathscr{P}$-可解的. 进一步，将证明 Lewy 的局部不可解算子也是 $\mathscr{P}$-可解的. 另外，还将得到方程式(11.1)的 $\mathscr{P}$-可解性的充分必要条件.

为了得到以上的结果，在 11.2 节引进空间 $\mathscr{P}_k$，它由所有的 $k$ 次拟齐次多项式构成. 然后证明算子 $P(x,\partial)$ 的 $\mathscr{P}$-可解性等价于：对每一个 $k\in M^+=\{a\cdot\alpha:\alpha\in I_+^n\}$，$P(x,\partial)$ 是一个从 $\mathscr{P}_{k+m}$ 到 $\mathscr{P}_k$ 的满射. 在 11.3 节引进 $\mathscr{P}_k$ 上的内积，发现 $P(x,\partial)$ 的共轭算子 $P^*:\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_{k+m}$ 正好是算子 $\bar{P}(\partial,x)$，据此完成了本章主要定理(定理 11.1)的证明. 在 11.4 节给出了 $\mathscr{P}$-可解算子 $P(x,\partial)$ 的“右逆”的一般形式. 令人惊讶的是，此右逆仍然是拟齐性线性偏微分算子. 这里还针对常系数偏微分算子的情形，给出了求多项式解的简易方法.

## 11.2　空间 $\mathscr{P}_k$ 和多项式 $e_k(x,\xi)$

根据定义，一个 $\mathbf{R}^n$ 上的多项式 $u(x)$ 称为是 $k$ 次拟齐次的(关于伸缩 $\{\delta_\tau\}$)，如果对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $\tau>0$，有

$$u\circ\delta_\tau(x)=\tau^k u(x)$$

显然 $\mathbf{R}^n$ 上的所有 $k$ 次拟齐次多项式在复数域上构成线性空间，记

为 $\mathscr{P}_k$.

**引理 11.1**　假设 $u_j \in \mathscr{P}_{k_j}$，当 $i \neq j$ 时，$k_i \neq k_j$，$j = 1, \cdots, l$，且

$$\sum_{j=1}^{l} u_j = 0 \tag{11.4}$$

则 $u_j = 0, j = 1, \cdots, l$.

**证明**　令 $L = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \partial_i$，由广义的 Euler 公式(6.8)，有

$$L[u_j] = k_j u_j, \qquad j = 1, \cdots, l$$

因此由式(11.4)有

$$L^r \sum_{j=1}^{l} u_j = 0, \qquad r = 0, 1, \cdots, l-1$$

即

$$\sum_{j=1}^{l} k_j^r u_j = 0, \qquad r = 0, 1, \cdots, l-1 \tag{11.5}$$

不难看出系数矩阵 $\{k_j^r\}$ 是一个 $l \times l$ 阶的范德蒙型矩阵. 因为当 $i \neq j$ 时，$k_i \neq k_j$，所以系数矩阵非退化. 所以有 $u_j \equiv 0, j = 1, \cdots, l$.

令 $M^+ = \{a \cdot \alpha : \alpha \in I_+^n\} = \{k_j, j = 0, 1, \cdots\}$，其中 $k_0 = 0$，$k_j < k_{j+1}, j = 0, 1, \cdots$.

**引理 11.2**　取 $f \in \mathscr{P}$，则存在 $k_j \in M^+$ 和 $f_j \in \mathscr{P}_{k_j}$，$1 \leqslant j \leqslant k$，使得

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} f_j(x) \tag{11.6}$$

而且其分解形式是唯一的.

**证明**　给定 $f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} b_\alpha x^\alpha$，令 $k_r = \max_{|\alpha| \leqslant l} a \cdot \alpha$，有

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{a \cdot \alpha = k_j} b_\alpha x^\alpha = \sum_{j=0}^{k} f_j(x)$$

其中 $f_j(x) = \sum_{a \cdot \alpha = k_j} b_\alpha x^\alpha \in \mathscr{P}_{k_j}$.

根据引理 11.1 可知，表达式(11.6) 是唯一的.

注意到一个 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子是一个从 $\mathscr{P}_{k+m}$ 到 $\mathscr{P}_k$ 的映射，从而由引理 11.1、引理 11.2，可以得到下列结果：

**命题 11.1**　取 $P(x,\partial)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，则有

(1) 方程式(11.1) 是 $\mathscr{P}$-可解的，当且仅当对每个具有形如式(11.6) 的 $f_j \in \mathscr{P}_{k_j}$，存在 $u_j \in \mathscr{P}_{k_j+m}$ 满足

$$P(x,\partial)u_j = f_j,\quad 0 \leqslant j \leqslant r$$

(2) 算子 $P(x,\partial)$ 是 $\mathscr{P}$-可解的，当且仅当对 $\forall N \in M^+$，$P(x,\partial)$ 是从 $\mathscr{P}_{N+m}$ 到 $\mathscr{P}_N$ 的满射.

**证明**　(1)"$\Leftarrow$" 显然.

"$\Rightarrow$"　设 $P[u] = f$，则 $u \in \mathscr{P}$，由引理 11.2 有 $u = \sum_{j=1}^{k'} u_j$，$u_j \in \mathscr{P}_{m'_j}$ 且

$$f = P[u] = \sum_{j=1}^{k'} P[u_j] = \sum_{j=1}^{k} f_j$$

由引理 11.2 可知

$$\begin{cases} P[u_j] = f_j, & j = 1,\cdots,k \\ k = k' \end{cases}$$

所以 $m'_j = m + m_j$.

(2)"$\Leftarrow$"　$\forall f \in \mathscr{P}$，则 $f = \sum_{j=1}^{k} f_j$，$f_j \in \mathscr{P}_{m_j}$，由条件知 $P$ 是满射，所以存在 $u_j \in \mathscr{P}_{m_j+m}$，使 $P[u_j] = f_j$. 令 $u = \sum_{j=1}^{k} u_j \in \mathscr{P}$，则 $P[u] = f$，所以 $P$ 是 $\mathscr{P}$ 可解的.

"$\Rightarrow$" 因为 $P$ 是 $\mathscr{P}$ 可解的，所以 $\forall f \in \mathscr{P}$，存在 $u \in \mathscr{P}$，使 $P[u] = f$. 特别地，当 $f \in \mathscr{P}_N$ 时，由 (1) 知，存在 $u \in \mathscr{P}_{N+m}$，使 $P[u] = f$.

至此，把一个无穷维空间 $\mathscr{P}$ 上的可解性问题简化为一列有限维空间上的可解性问题.

下面在 $\mathscr{P}_N(N\in M^+)$ 上引进一种内积. 注意到 $a\cdot\alpha=N,a\cdot\beta=N$，且 $\alpha\neq\beta,\partial^\alpha(x^\beta)=0$. 所以对 $u(x)=\sum\limits_{a\cdot\alpha=N}a_\alpha x^\alpha\in\mathscr{P}_N$，$v(x)=\sum\limits_{a\cdot\beta=N}b_\beta x^\beta\in\mathscr{P}_N$，有

$$\bar{v}(\partial)u(x)=\sum_{a\cdot\beta=N}\bar{b}_\beta\partial^\beta(\sum_{a\cdot\alpha=N}a_\alpha x^\alpha)=\sum_{a\cdot\alpha=N}\alpha!a_\alpha\bar{b}_\alpha$$

因此可定义 $\mathscr{P}_N$ 中的内积如下：对 $u\in\mathscr{P}_N,v\in\mathscr{P}_N$，

$$\langle u,v\rangle_N=\bar{v}(\partial)u(x)\tag{11.7}$$

从现在开始，将把 $\mathscr{P}_N$ 看做一个具有上述内积的 Hilbert 空间，且有标准正交基 $\left\{\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\right\}_{a\cdot\alpha=N}$. 另外为了方便，当 $N\in\mathbf{R}\backslash M^+$ 时，定义 $\mathscr{P}_N=\{0\}$.

下面引进一类在研究 $\mathscr{P}$-可解性中很有用的多项式. 对 $\xi\in\mathbf{C}^n$，定义 $e_N(x,\xi)$ 如下：

$$e_N(x,\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{a\cdot\alpha=N}\dfrac{\xi^\alpha x^\alpha}{\alpha!}, & N\in M^+,\forall x\in\mathbf{R}^n\\ 0, & N\in\mathbf{R}\backslash M^+,\forall x\in\mathbf{R}^n\end{cases}\tag{11.8}$$

**命题 11.2** 设 $P(x,\partial)=\sum\limits_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial^\beta$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，则

$$P(x,\partial)e_N(x,\xi)=P(\partial_\xi,\xi)e_{N-m}(x,\xi)\tag{11.9}$$

其中，$P(\partial_\xi,\xi)=\sum\limits_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\beta,\alpha}\xi^\alpha\partial_\xi^\beta$.

**证明** 因为

$$\partial_x^\beta e_N(x,\xi)=\sum_{a\cdot\alpha=N,\alpha\geqslant\beta}\xi^\alpha\frac{x^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!}=\xi^\beta e_{N-a\cdot\beta}(x,\xi)$$

所以

$$P(x,\partial_x)e_N(x,\xi)=\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial_x^\beta e_N(x,\xi)=$$

$$\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\alpha,\beta}x^\alpha\xi^\beta e_{N\ \ a\cdot\beta}(x,\xi)=$$

$$\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\alpha,\beta}\xi^\beta\partial_\xi^\alpha e_{N\ \ a\cdot\beta+a\cdot\alpha}(x,\xi)=$$

$$\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\alpha,\beta}\xi^\beta\partial_\xi^\alpha e_{N-m}(x,\xi)=$$

$$\sum_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=-m}a_{\beta,\alpha}\xi^\alpha\partial_\xi^\beta e_{N-m}(x,\xi)=$$

$$P(\partial_\xi,\xi)e_{N-m}(x,\xi)$$

**注 11.1**　如果 $P(\partial)$ 是一个具有常系数的 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，由式(11.9)可推出

$$P(\partial_x)e_N(x,\xi)=P(\xi)e_{N-m}(x,\xi)\qquad(11.10)$$

此外还有对 $f\in\mathscr{P}_N$，

$$\langle f(x),e_N(x,\xi)\rangle_N=f(\bar{\xi})\qquad(11.11)$$

事实上，设 $f(x)=\sum_{a\cdot\beta}f_\beta x^\beta$，则

$$\langle f(x),e_N(x,\xi)\rangle=\sum_{a\cdot\beta=N}\frac{\bar{\xi}^\beta}{\beta!}\beta!f_\beta=f(\bar{\xi})$$

## 11.3　主要定理的证明

**命题 11.3**　令 $P(x,\partial)=\sum\limits_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=m}a_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial^\beta$ 为 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，记 $\bar{P}(\partial,x)=\sum\limits_{a\cdot\beta-a\cdot\alpha=-m}\bar{a}_{\beta,\alpha}x^\alpha\partial^\beta$. 则对 $u\in\mathscr{P}_{N+m}$，$v\in\mathscr{P}_N$，有

$$\langle P(x,\partial)u,v\rangle_N=\langle u,\bar{P}(\partial,x)v\rangle_{N+m}\qquad(11.12)$$

**证明**　利用式(11.9)、式(11.10)，可得到

$$P(x,\partial_x)u(x)=P(x,\partial_x)\langle u(\xi),e_{N+m}(x,\xi)\rangle_{N+m}=$$

$$\langle u(\xi),\bar{P}(x,\partial_x)e_{N+m}(x,\xi)\rangle_{N+m}=$$

$$\langle u(\xi),\bar{P}(\partial_\xi,\xi)e_N(x,\xi)\rangle_{N+m}$$

注意到式(11.7)和式(11.9),由上式可以推出

$$\begin{aligned}\langle P(x,\partial_x)u(x),v(x)\rangle_N &= \bar{v}(\partial_x)P(x,\partial_x)u(x) = \\ & v(\partial_x)\langle u(\xi),\bar{P}(\partial_\xi,\xi)e_N(x,\xi)\rangle_{N+m} = \\ & \langle u(\xi),\bar{P}(\partial_\xi,\xi)v(\partial_x)e_N(x,\xi)\rangle_{N+m} = \\ & \langle u(\xi),P(\partial_\xi,\xi)v(\xi)\rangle_{N+m} = \\ & \langle u(x),\bar{P}(\partial_x,x)v(x)\rangle_{N+m}\end{aligned}$$

证毕.

**定理 11.1**　设 $P(x,\partial)$ 为具有光滑系数的 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子,则 $P(x,\partial)$ 是 $\mathscr{P}$-可解的,当且仅当算子 $\bar{P}(\partial,x)$ 是映 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{P}$ 的单射.

**证明**　用 $P^*$ 表示算子 $P(x,\partial):\mathscr{P}_{N+m}\to\mathscr{P}_N$ 的共轭算子,也就是 $P^*:\mathscr{P}_N\to\mathscr{P}_{N+m}$ 使得对 $u\in\mathscr{P}_{N+m},v\in\mathscr{P}_N$,有

$$\langle Pu,v\rangle_N=\langle u,P^*v\rangle_{N+m}$$

由命题 11.3 可知 $P^*(x,\partial_x)=\bar{P}(\partial_x,x)$. 由于 $\mathscr{P}_N,\mathscr{P}_{N+m}$ 都是有限维的 Hilbert 空间,故 $P$ 是从 $\mathscr{P}_{N+m}$ 到 $\mathscr{P}_N$ 的一个满射,当且仅当 $\bar{P}(\partial_x,x)$ 是从 $\mathscr{P}_N$ 到 $\mathscr{P}_{N+m}$ 的单射. 所以利用命题 11.1 的结论(2)可推出:$P$ 的 $\mathscr{P}$-可解性等价于对每一个 $N\in M^+$,$\bar{P}(\partial_x,x):\mathscr{P}_{N+m}\to\mathscr{P}_N$ 是单射,这是由于引理 11.1 和引理 11.2 也等价于 $\bar{P}(\partial,x)$ 从 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{P}$ 的单射性.

事实上,“$\Rightarrow$”设 $v\in\mathscr{P}$ 使 $\bar{P}v=0$. 由 $v\in\mathscr{P}$ 及引理 11.2 知 $v=\sum_j v_j$,所以 $\bar{P}v=\sum_j\bar{P}v_j=0$. 由 $\bar{P}:\mathscr{P}_{N+m}\to\mathscr{P}_N$ 单射,$v_j=0\Rightarrow v=0$,所以 $\bar{P}:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ 单射.

“$\Leftarrow$”设 $\bar{P}:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ 单射. $\forall v\in\mathscr{P}_{N+m}\subset\mathscr{P},\bar{P}v=0$,由 $\bar{P}$ 单射,得 $v=0$,所以 $\bar{P}:\mathscr{P}_{N+m}\to\mathscr{P}$ 单射. 证毕.

类似地,可得到下列结论:

**定理 11.2**　假设 $f\in\mathscr{P}$ 且 $f=\sum_{j=0}^{r}f_j,f_j\in\mathscr{P}_{k_j}$. 对 $k_j\in M^+$,

记 $K_j = \mathrm{Ker}\bar{P}(\partial, x) \cap \mathscr{P}_{k_j}$. 令 $P(x,\partial)$ 为 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，则方程式(11.1)是 $\mathscr{P}$-可解当且仅当 $f_j \in K_j^{\perp} = \{g \in \mathscr{P}_{k_j}: \langle g, v\rangle_{k_j} = 0, \forall v \in K_j\}, j = 0,1,\cdots,r$.

**推论 11.1**　令 $P(\partial)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有常系数的非平凡拟齐性线性偏微分算子，则 $P(\partial)$ 是 $\mathscr{P}$-可解的.

**证明**　由于 $P^* = \bar{P}(x)$，故 $P^* f = \bar{P}(x)f(x), \forall f \in \mathscr{P}$，从而 $P^*$ 是 $\mathscr{P}$ 上的单射. 由定理 11.1 可知 $P(\partial)$ 是 $\mathscr{P}$-可解的.

下面看怎么找出解来(先求一个特解，再找出一般解).

(1) $P(\partial)u = 0, u \in \mathscr{P}_{N+m}$ ($P(\partial)$ 是 $m$ 次拟齐性常系数 LPDO)

令 $u = e_{N+m}(x,\xi) = \sum\limits_{a\cdot\alpha = m+N} \dfrac{\xi^\alpha}{\alpha!}x^\alpha$，则

$$P(\partial)e_{N+m}(x,\xi) = P(\xi)e_N(x,\xi) \tag{11.3}$$

取 $\xi \in \mathbf{C}^n$，使得 $P(\xi) = 0$，则 $P[e_{N+m}(x,\xi)] \equiv 0$.

(2) 求 $u \in \mathscr{P}_{N+m}$ 满足方程 $Pu = f, f \in \mathscr{P}_N$.

令 $u(x,\xi) = f(\partial_\xi)\dfrac{e_{N+m}(x,\xi)}{P(\xi)}$ ($P(\xi) \neq 0$)，则

$$P(\partial_x)\left[f(\partial_\xi)\frac{e_{N+m}(x,\xi)}{P(\xi)}\right] =$$

$$f(\partial_\xi)P(\partial_x)\left[\frac{e_{N+m}(x,\xi)}{P(\xi)}\right] =$$

$$f(\partial_\xi)P(\xi)\frac{e_{N+m}(x,\xi)}{P(\xi)} =$$

$$f(\partial_\xi)e_N(x,\xi) = f(x)e_0(x,\xi) = f(x) \tag{11.14}$$

注意，$\dfrac{1}{P(\mathrm{i}\xi)}(\sum C_\alpha \delta^{(\alpha)})^\wedge$(两广义函数的乘积没有意义)可用这里的方法给予定义，从而解决物理学中的问题.

此外，设 $u(x) = \sum\limits_{a\cdot\beta = N+m} u_\beta x^\beta, f(x) = \sum\limits_{a\cdot\alpha = N} f_\alpha x^\alpha$ ($u_\beta$ 待定)，从

$$Pu = f \Rightarrow \sum_{a\cdot\beta = N+m} u_\beta P[x^\beta] = \sum_{a\cdot\alpha = N} f_\alpha x^\alpha \Rightarrow$$

$$\sum_{\alpha\cdot\beta=N+m} u_\beta\left(\sum_{a\cdot\alpha=N} C_{\alpha,\beta}x^\alpha\right)=\sum_{a\cdot\alpha=N} f_\alpha x^\alpha$$

最后解方程组

$$\sum_{a\cdot\beta=N+m} C_{\alpha,\beta}u_\beta = f_\alpha \tag{11.15}$$

得到 $u_\beta$，即可解出 $u$. 证毕.

**例 11.1** 考虑 Lewy 算子

$$L=L(x,y,t,\partial)=\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\frac{\partial}{\partial t} \tag{11.16}$$

这里 $\partial=(\partial_x,\partial_y,\partial_t)$.

显然 $L$ 关于伸缩族

$$\delta_\lambda(x,y,t)=(\lambda x,\lambda y,\lambda^2 t)$$

为 1 次拟齐性线性偏微分算子，且 $L^*=\bar{L}(\partial,x,y,t)=(x-\mathrm{i}y)+2\mathrm{i}t\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

取 $f\in\mathscr{P}_N, N\in I_+$，使 $L^*f=0$，则 $f$ 可以表示为

$$f=\sum_{j=0}^{[\frac{N}{2}]} t^j f_j(x,y) \tag{11.17}$$

其中 $f_j(x,y)$ 满足

$$f_j(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{N-2j}f_j(x,y),\qquad \forall\lambda>0$$

则有

$$\sum_{j=0}^{[\frac{N}{2}]} t^j(x-\mathrm{i}y)f_j+\sum_{j=0}^{[\frac{N}{2}]} 2\mathrm{i}t^{j+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f_j=0$$

从而比较 $t$ 的各次幂前系数得

$$f_0=0,\quad (x-\mathrm{i}y)f_0=0$$

$$(x-\mathrm{i}y)f_j+2\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)f_{j-1}=0,\quad 1\leqslant j\leqslant\left[\frac{N}{2}\right] \tag{11.18}$$

由 $f_0=0$ 得到 $f_1=0$，进而得到 $f_2=0$，…… 依次迭代下去得

$f_j=0, j=0,\cdots,[\frac{N}{2}]$，即 $f\equiv 0$. 所以，对每个 $N\in I_+$，$L^*$ 是 $\mathscr{P}_N$ 上的单射. 由定理 11.1 可知，$L$ 是 $\mathscr{P}$-可解的.

## 11.4 $\mathscr{P}$-可解算子的右逆

**定义 11.1** 令 $P(x,\partial)$ 为 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，称线性映射 $Q:\mathscr{P}_N\to\mathscr{P}_{N+m}$ 为算子 $P(x,\partial)$ 在 $\mathscr{P}_N$ 上的右逆，如果对任意 $u\in\mathscr{P}_N$，则有

$$P(x,\partial)Qu=u \tag{11.19}$$

**命题 11.4** 令 $P(x,\partial)$ 为一个 $m$ 次拟齐性线性偏微分算子，且是 $\mathscr{P}$-可解的，则 $P$ 在 $\mathscr{P}_N$ 上有一个右逆，它是一个 $-m$ 次的拟齐性线性偏微分算子.

**证明** 容易证明 $PP^*=P(x,\partial)\bar{P}(\partial,x)$ 是 0 次拟齐性线性偏微分算子，且为 $\mathscr{P}_N$ 到自身的一个同构映射. 因此，对每一个 $\alpha\in I_+^n$ 且 $a\cdot\alpha=N$，存在 $g_\alpha\in\mathscr{P}_N$，使得

$$PP^*g_\alpha(x)=x^\alpha$$

令

$$g_N(x,\xi)=\sum_{a\cdot\alpha=N}\frac{\xi^\alpha}{\alpha\,!}g_\alpha(x),\qquad \forall\xi\in\mathbf{R}^n$$

则有

$$PP^*g_N(x,\xi)=e_N(x,\xi)$$

因此由式(11.11)，对 $f\in\mathscr{P}_N$ 有

$$\begin{aligned}f(x)=\langle e_N(x,\xi),f(\xi)\rangle_N=\\ \langle PP^*g_N(x,\xi),f(\xi)\rangle_N=\\ P(x,\partial)\bar{P}(\partial,x)g_N(x,\partial_\xi)f(\xi)\end{aligned}$$

注意到 $g_N(x,\partial_\xi)f(\xi)$ 不依赖于 $\xi$，可得

$$f(x)=P(x,\partial)\bar{P}(\partial,x)g_N(x,\partial_x)f(x)$$

因此算子

$$P(\partial,x)g_N(x,\partial):\mathscr{P}_N\to\mathscr{P}_{N+m}$$

为 $P$ 在 $\mathscr{P}_N$ 上的右逆，它是 $-m$ 次拟齐性线性偏微分算子. 证毕.

对于常系数情形，可以得到 $P(\partial)$ 的具显式表达的右逆. 事实上有下列结论：

**定理 11.3** 假设 $P(\partial)$ 为 $m$ 次拟齐性常系数线性偏微分算子. 取 $\xi\in\mathbf{C}^n$ 使得 $P(\xi)\neq 0$，则对每个 $N\in M^+$，算子 $P(\partial):\mathscr{P}_{N+m}\to\mathscr{P}_N$ 有右逆 $R_{N,\xi}$ 如下：

$$R_{N,\xi}(\partial_x)=\sum_{a\cdot\alpha\leqslant N}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha\frac{1}{P(\xi)}\right)e_{m+a\cdot\alpha}(x,\xi)\partial_x^\alpha \tag{11.20}$$

其中 $e_{m+a\cdot\alpha}(x,\xi)=\sum\limits_{a\cdot\beta=a\cdot\alpha+m}\dfrac{\xi^\beta x^\beta}{\beta!}$.

**证明** 对 $f\in\mathscr{P}_N$，有

$$R_{N,\xi}(\partial_x)f=\sum_{a\cdot\alpha\leqslant N}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha\frac{1}{P(\xi)}\right)(\partial_x^\alpha f(x))e_{m+a\cdot\alpha}(x,\xi)=$$

$$\sum_{a\cdot\alpha\leqslant N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\frac{1}{P(\xi)}\partial_\xi^\alpha f(\partial_\xi)e_{N+m}(x,\xi)=$$

$$f(\partial_\xi)\left(\frac{1}{P(\xi)}e_{N+m}(x,\xi)\right)$$

因此

$$P(\partial_x)R_{N,\xi}(\partial_x)f(x)=$$

$$P(\partial_x)f(\partial_\xi)\left(\frac{1}{P(\xi)}e_{N+m}(x,\xi)\right)=$$

$$f(\partial_\xi)P(\partial_x)\left(\frac{1}{P(\xi)}e_{N+m}(x,\xi)\right)=$$

$$f(\partial_\xi)e_N(x,\xi)=f(x)$$

完成定理的证明. 证毕.

**推论 11.2** 设 $f\in\mathscr{P}$，则存在 $N\in\{a\cdot\alpha,\alpha\in I_+^n\}$ 和 $R_{N,\xi}(\partial_x)$，使得

$$P(\partial)R_{N,\xi}(\partial_x)f(x)=f(x)$$

仅须将 $f$ 唯一分解成 $f=\sum_{j=1}^{l} f_j, f_j \in \mathscr{P}_{m_j}$，可取 $N=\max_{|\alpha|\leqslant k} a\cdot\alpha$.

**命题 11.5** 假设 $P(\partial)$ 为 $m$ 次拟齐性常系数线性偏微分算子. 取 $\xi\in\mathbf{C}^n$ 满足

$$P(\xi)=0$$

则 $P(\partial)e_{N+m}(x,\xi)=0$.

**证明** 由式(11.9)有

$$P(\partial_x)e_{N+m}(x,\xi)=P(\xi)e_m(x,\xi)=0$$

证毕.

**注 11.2** 在参考文献[43]中曾经得到下述结果：

令 $P$ 为一个 $m(m>0)$ 次的拟齐性线性偏微分算子，如果指数 $a_1,\cdots,a_n$ 全为有理数或者 $m\in M=\{a\cdot\alpha,\alpha\in I_+^n\}$，则方程 $P[u]=0$ 的多项式解空间必为无穷维的.

**例 11.2** 考虑算子 $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2(a_j=1,j=1,\cdots,n,m=2,a\cdot\alpha=|\alpha|)$.

若 $\Delta u=f\in\mathscr{P}_N$，那么

$$u(x)=f(\partial_\xi)\left[\frac{e_{N+2}(x,\xi)}{|\xi|^2}\right],\qquad \xi\neq 0$$

对 $\xi=0$，取

$$u(x)=f(\partial_\xi)\int_0^\infty e^{-|\xi|^2t}\mathrm{d}t e_{N+2}(x,\xi)=$$

$$\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\int_0^\infty\partial_\xi^\alpha e^{\xi^2t}\mathrm{d}t e_{N+2}(x,\xi)\partial_x^\alpha f(x)$$

**说明**：由命题 11.5 看出，$P(\partial)u=0$ 有解 $e_N(x,\xi)$（非常特殊的特解），$\xi\in\{\xi\in\mathbf{C}^n\mid P(\xi)=0\}\xlongequal{\text{def}}N(P)$. 问：任意解是否可用特解的线性组合逼近？这个问题在附加一定的条件下是成立的.

**引理 11.3** 设 $V,W$ 为 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{L}(V,W)$，若 $TV$ 是 $W$ 中的闭集，则 $T^*W$ 是 $V$ 中的闭集，且

$$V = \mathrm{Ker}T \oplus T^* W$$

其中 $\mathrm{Ker}T = \{u \in V \mid Tu = 0\}$(见参考文献[53]中第 56 页).

**引理 11.4** 设 $V$ 为 Hilbert 空间,$W$ 是 $V$ 的子空间,则 $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$,其中 $W^\perp = \{u \in V \mid \langle u, w\rangle\} = 0, \forall w \in W\}$,$\overline{W}$ 为闭包.

其证明参看一般泛函分析书籍.

设 $P(\partial)$ 是 $m$ 次拟齐性常系数 LPDO,令 $K_N = \{u \in \mathscr{P}_N \mid P(\partial)u = 0\} = \mathrm{Ker}P(\partial)$,$E_N = \{v \in \mathscr{P}_N \mid v = \sum_{j=1}^{l} C_j e_N(x, \xi^{(j)})$, $C_j \in \mathbf{C}^n, \xi^{(j)} \in N(P), l \in I^+\}$. 问:$\overline{E}_N = K_N$ 的条件是什么?

**定理 11.4** $\overline{E}_N = K_N$ 的充要条件为:若 $f \in \mathscr{P}_N$,且 $N(f) \supset N(P)$,则 $P$ 可整除 $f$.

**证明** 因为 $P(\partial): \mathscr{P}_N \to \mathscr{P}_{N-m}$,且 $P(\partial)\mathscr{P}_N = \mathscr{P}_{N-m}$,即为闭的. 由引理 11.3,有

$$\mathscr{P}_N = \mathrm{Ker}(P(\partial)) \oplus P^*(\mathscr{P}_{N-m}) = K_N \oplus \overline{P}(x)\mathscr{P}_{N-m} \tag{11.21}$$

今证:

$$\overline{E}_N = K_N \Leftrightarrow E_N^\perp \subset \overline{P}(x)\mathscr{P}_{N-m} \tag{11.22}$$

若 $\overline{E}_N = K_N$(由引理 11.4$\Rightarrow (E_N^\perp)^\perp = K_N \Rightarrow \overline{E}_N^\perp = K_N^\perp = \overline{P}(x)\mathscr{P}_{N-m}$(由 11.21)),所以,$E_N^\perp \subset \overline{E}_N^\perp = \overline{P}(x)\mathscr{P}_{N-m}$.

反之,由引理 11.4,$\overline{E}_N \supset (\overline{P}(x)\mathscr{P}_{N-m})^\perp = K_N$. 又 $\forall v(x) \in E_N$,则

$$P(\partial)v = \sum_{j=1}^{l} C_j P(\partial) e_N(x, \xi^{(j)}) =$$
$$\sum_{j=1}^{l} C_j P(\xi) e_N(x, \xi^{(j)}) = 0$$

知 $v \in K_N$,得 $\overline{E}_N \subset K_N$. 综合起来知 $\overline{E}_N = K_N$.

再证 $E_N^\perp \subset \overline{P}(x)\mathscr{P}_{N-m}$ 的充要条件是:若 $f \in \mathscr{P}_N$,且 $N(f) \supset N(P)$,则 $P$ 可整除 $f$.

因为

$$E_{\bar{N}} = \{g(x) \in \mathscr{P}_N \mid \langle e_N(x,\xi), g(x)\rangle_N = 0, \forall \xi \in N(P)\} =$$
$$\{g(x) \in \mathscr{P}_N \mid \bar{g}(\xi) = 0, \forall \xi \in N(P)\} =$$
$$\{\bar{f} \in \mathscr{P}_N \mid f(\xi) = 0, \forall \xi \in N(P)\}$$

所以,若

$$E_{\bar{N}} \subset \bar{P}(x)\mathscr{P}_{N-m}$$

则对 $\forall f \in \mathscr{P}_N, N(P) \subset N(f)$, 得 $\bar{f} \in E_{\bar{N}}^{\perp}$, 从而 $\bar{f} \in \bar{P}(x)\mathscr{P}_{N-m} \Rightarrow f(x) = P(\partial)\bar{q}(x)$,其中 $q(x) \in \mathscr{P}_{N-m}$,即 $P$ 整除 $f$.

反之,设 $f \in \mathscr{P}_N$.

设 $f \in E_{\bar{N}}$,即 $f(\xi) = 0, \forall \xi \in N(P)$,于是 $N(P) \subset N(f)$. 由条件 $P$ 整除 $f$,从而 $f(x) \in \bar{P}(x)\mathscr{P}_{N-m}$,从而 $E_{\bar{N}}^{\perp} \subset \bar{P}(x)\mathscr{P}_{N-m}$. 证毕.

**推论 11.3**　设 $L(\partial_x)$ 是关于 $\delta_\tau(x)$ 为 $m$ 次常系数拟齐性 LPDO,如果

$$P(\partial_t, \partial_x) = \frac{\partial}{\partial t} - L(\frac{\partial}{\partial x}) \tag{11.23}$$

则 $K_N(P) = \bar{E}_N(P)$.

**证明**　令 $\delta_s(t,x) = (s^m t, s^{a_1}x_1, \cdots, s^{a_n}x_n)$,则 $P(\partial_t, \partial_x)$ 为 $m$ 次拟齐性的. 若 $f(t,x) \in \mathscr{P}_N$,当 $P(t,x) = t - L(x) = 0$ 时,有

$$f(t,x) = 0$$

即 $f(L(x),x) = 0$. 又 $f \in \mathscr{P}_N$,由多项式唯一分解定理,可以推出 $f(t,x) = (t - L(x))q(x,t)$. 于是 $P$ 整除 $f$,由定理 11.4 得证.

这里是由代数的方法得到偏微分方程的结果.

**例 11.3**　对 $\mathbf{R}^3$ 中方程

$$\Delta_x u = f(x) \in C_0^\infty$$

利用 Fourier 分析的方法是可解的,得

$$u(x) = \frac{1}{r} * f = \int \frac{f(x-\xi)}{r(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

若 $f$ 是多项式,那么由上式

$$u(x) = \int \frac{\sum \frac{\partial^\alpha f(-\xi)}{\alpha!}}{r(\xi)} x^\alpha \mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \int \frac{\partial^\alpha f(-\xi)}{\alpha! r(\xi)} \mathrm{d}\xi x^\alpha$$

形式上是多项式，但 $x^\alpha$ 前系数是发散的，因而不是解.

利用前面的方法(见例 11.2)，却有

$$u(x) = f(\partial_\xi) \frac{e_{2+|\alpha|}(x,\xi)}{|\xi|^2} =$$

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \frac{1}{|\xi|^2}) e_{2+|\alpha|}(x,\xi) \cdot \partial^\alpha f \tag{11.24}$$

(用 Leibniz 公式，该问题中 $a = (1,1,\cdots,1)$，$|\alpha| = a \cdot \alpha$)

**引理 11.5**

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{x^\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} = \frac{1}{N!} \langle x,\xi \rangle^N, \quad x,\xi \in \mathbf{R}^n \tag{11.25}$$

**证明** 由泰勒展式，

$$\mathrm{e}^{t\langle x,\xi\rangle} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\langle x,\xi\rangle^N}{N!} t^N$$

另外

$$\mathrm{e}^{t\langle x,\xi\rangle} = \mathrm{e}^{tx_1\xi_1+\cdots+tx_n\xi_n} =$$

$$(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{x_1^{\alpha_1}\xi_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} t^{\alpha_1}) \cdots (\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{x_n^{\alpha_n}\xi_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} t^{\alpha_n}) =$$

$$\sum_{\alpha} \frac{x^\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} t^{|\alpha|} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=N} \frac{x^\alpha \xi^\alpha}{\alpha!} t^N$$

比较 $t^N$ 前的系数即得式(11.25).

由引理 11.5

$$\mathrm{e}_{2+|\alpha|}(x,\xi) = \sum_{\beta=2+|\alpha|} \frac{x^\beta \xi^\beta}{\beta!} = \frac{\langle \xi, x\rangle^{2+|\alpha|}}{(2+|\alpha|)!} \tag{11.26}$$

下面从$\frac{1}{|\xi|^2}$开始改造：任取 $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$，使 $|\xi_0| = 1$，$|\xi - \xi_0|$ 充分小，有

$$|\xi|^2 = |\xi - \xi_0 + \xi_0|^2 =$$

$$|\xi_0|^2 + 2\langle \xi_0, \xi - \xi_0 \rangle + |\xi - \xi_0|^2 =$$
$$1 + \langle 2\xi_0, \xi - \xi_0 \rangle + |\xi - \xi_0|^2$$

及

$$\frac{1}{|\xi|^2} = (1 + \langle 2\xi_0, \xi - \xi_0 \rangle + |\xi - \xi_0|^2)^{-1} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\langle 2\xi_0, \xi - \xi_0 \rangle + |\xi - \xi_0|^2)^k$$

于是

$$\left(\partial_\xi^\alpha \frac{1}{|\xi|^2}\right)_{\xi=\xi_0} = \left(\partial_\xi^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\langle 2\xi, \xi - \xi_0 \rangle + |\xi - \xi_0|^2)^k\right)\right)_{\xi=\xi_0} \tag{11.27}$$

因为

$$(\langle 2\xi_0, \xi - \xi_0 \rangle + |\xi - \xi_0|^2)^k =$$
$$\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \langle 2\xi_0, \xi - \xi_0 \rangle^j \langle \xi - \xi_0, \xi - \xi_0 \rangle^{k-j} =$$
$$\sum_{j=0}^{k} k! \frac{\langle 2\xi_0, \xi - \xi_0 \rangle^j}{j!} \frac{\langle \xi - \xi_0, \xi - \xi_0 \rangle^{k-j}}{(k-j)!} =$$
$$\sum_{j=0}^{k} k! \left(\sum_{|\gamma|=j} \frac{(2\xi_0)^\gamma (\xi - \xi_0)^\gamma}{\gamma!}\right)\left(\sum_{|\beta|=k-j} \frac{(\xi - \xi_0)^{2\beta}}{\beta!}\right) =$$
$$\sum_{|\beta|+|\gamma|=k} k! \frac{(2\xi_0)^\gamma (\xi - \xi_0)^{\gamma+2\beta}}{\gamma!\beta!}$$

所以

$$\frac{1}{|\xi|^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! \sum_{|\beta|+|\gamma|=k} \frac{(2\xi_0)^\gamma (\xi - \xi_0)^{\gamma+2\beta}}{\gamma!\beta!}$$

上式等号两边求 $\partial_\xi^\alpha$，有

$$\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha \frac{1}{|\xi|^2}\right) =$$
$$\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! \sum_{|\beta|+|\gamma|=k} \frac{(2\xi_0)^\gamma (\xi - \xi_0)^{\gamma+2\beta}}{\gamma!\beta!}\right)_{\xi=\xi_0} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!\sum_{|\beta|+|\gamma|=k}\frac{(2\xi_0)^\gamma}{\gamma!}\frac{1}{(\frac{\alpha-\gamma}{2})!}$$

因为 $\alpha=\gamma+2\beta, k=\frac{|\alpha-\gamma|}{2}+|\gamma|=\frac{|\alpha|-|\gamma|}{2}+|\gamma|=$
$\frac{|\alpha|+|\gamma|}{2}\leqslant|\alpha|$,所以

$$\frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha\frac{1}{|\xi|^2})=$$

$$\sum_{k\leqslant|\alpha|}\sum_{\left|\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|+|\gamma|=k,\gamma\leqslant\alpha}(-1)^{\frac{|\alpha+\gamma|}{2}}(\frac{|\alpha+\gamma|}{2})!\frac{(2\xi_0)^\gamma}{\gamma!}\frac{1}{(\frac{\alpha-\gamma}{2})!}=$$

$$\sum_{\gamma\leqslant\alpha}(-1)^{\frac{|\alpha+\gamma|}{2}}\frac{(2\xi_0)^\gamma}{\gamma!}\frac{\left|\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|!}{(\frac{\alpha-\gamma}{2})!}\tag{11.28}$$

所以

$$u=\sum_{|\alpha|\leqslant N}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial^\alpha\frac{1}{|\xi|^2}\right)_{\xi=\xi_0}\frac{\langle\xi_0,x\rangle^{|\alpha|+2}}{(|\alpha|+2)!}\partial_x^\alpha f=$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N}\sum_{\gamma\leqslant\alpha}(-1)^{\left|\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|}\frac{(2\xi_0)^\gamma}{\gamma!}\frac{(\frac{\gamma+\alpha}{2})!}{(\frac{\alpha-\gamma}{2})!}\frac{<\xi_0,x>^{|\alpha|+2}}{(|\alpha|+2)!}\partial_x^\alpha f$$

仍是多项式.得证.

作为一个练习,读者可将

$$(\partial_t-\Delta_x)u=f$$

的多项式解展开.

# 第三部分

# Greiner 算子的基本解和实解析性

下文研究一类次椭圆算子，它广泛出现于弱拟凸超曲面的研究中，类似的算子也在非谐振荡子的量子力学中和电磁场中.

关于次椭圆算子的亚椭圆性和它在函数空间中的映射性质，也有许多研究，但精确的基本解只在个别情形下给出.精确的基本解有多方面的重要作用，例如在 Laplace-Beltrami 算子情形，它们紧密联系于底几何，且导致多变量的超几何型方程，这些方程一般不是经典超几何方程的明显推广，但都是自然的，且有显式的非平凡解.

考虑实子流形

$$\mathscr{M}=\left\{\operatorname{Im} z_{n+1}=f\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j\right)\right\}\subset \mathbf{C}^{n+1},\quad f(x)=x^k$$

其中，$k$ 为某个正整数.令 $z_j=x_j+\mathrm{i}x_{n+j}$，$1\leqslant j\leqslant n$，$t=\operatorname{Re} z_{n+1}$.向量场

$$Z_j=\frac{\partial}{\partial z_j}+\mathrm{i}f'(|z|^2)\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{2}(X_j-\mathrm{i}X_{n+j})$$

是切于 $\mathscr{M}$ 的全纯向量场在 $\mathscr{M}$ 的限制，$\{Z_1,\cdots,Z_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n\}$ 是复切丛 $\mathbf{C}\otimes T(\mathscr{M})$ 上的 CR 结构的一个框架.

这类向量场没有群结构，但具有伸缩性质.以下均设 $n=1$.后面较多地用到特殊函数及其性质，可参阅参考文献[1].

# 第十二章　基本解的推导

令

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{2}(Z\overline{Z} + \overline{Z}Z) - \frac{1}{2}\alpha[Z,\overline{Z}] \tag{12.1}$$

其中，$Z = \frac{\partial}{\partial z} + \mathrm{i}kz^{k-1}\overline{z}^k \frac{\partial}{\partial t}$，$\overline{Z} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \mathrm{i}k\overline{z}^{k-1}z^k \frac{\partial}{\partial t}$，$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$，$[Z,\overline{Z}] = Z\overline{Z} - \overline{Z}Z$，$k$ 是一个自然数，$\alpha$ 是一个复常数，$\pm\alpha \neq \frac{2m}{k} + 1, m = 0,1,\cdots$.

下面将寻找算子 $\mathcal{L}_\alpha$ 的基本解 $K_\alpha$. 12.1 节考虑 $-1 < \mathrm{Re}\alpha < 1$ 时的基本解；12.2 节考虑 $|\mathrm{Re}\alpha| < 1$ 时基本解的另一形式；12.3 节考虑 $|\mathrm{Re}\alpha| \geqslant 1$ 情形.

## 12.1　$-1 < \mathrm{Re}\alpha < 1$ 的情形

### 12.1.1　$-1 < \mathrm{Re}\alpha < 1$ 的情形

由于

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} + \mathrm{i}k|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial t}\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$
$$- k^2|z|^{4k-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathrm{i}\alpha k^2|z|^{2k-2}\frac{\partial}{\partial t} \tag{12.2}$$

对变量 $t$ 作 Fourier 变换得

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\tau)} = -\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - k|z|^{2k-2}\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\tau +$$

$$k^2 \mid z \mid^{4k-2} \tau^2 - \alpha k^2 \mid z \mid^{2k-2} \tau \tag{12.3}$$

引入极坐标如下：

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad w = Re^{i\phi}$$

其中 $w = (u, v)$ 为初值点. 由简单的计算得到

$$z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{4\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{4\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{12.4}$$

所以

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\tau)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{4\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{4\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} =$$

$$i k \tau \rho^{2k-2} \frac{\partial}{\partial \theta} + k^2 \tau^2 \rho^{4k-2} - \alpha k^2 \rho^{2k-2\tau} \tag{12.5}$$

用 $\delta$ 表示 Dirac 函数，则

$$\delta(x-u, y-v) = \frac{1}{R} \delta(\rho - R, \theta - \phi) = \frac{1}{R} \delta(\rho - R) \delta(\theta - \phi)$$

$$\delta(\theta - \phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(\theta-\phi)}$$

想要寻找 $\boldsymbol{K}^{(\tau)}$，使得

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\tau)} \boldsymbol{K}^{(\tau)} = \frac{1}{R} \delta(\rho - R) \delta(\theta - \phi) \tag{12.6}$$

为了方便，令 $\boldsymbol{K}^{(\tau)} = 4G^{(\tau)}$.

由于 $\mathcal{L}_\alpha^{(\tau)}$ 的系数和 $\theta$ 无关，令

$$G^{(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(\theta-\phi)} G_n(\rho, \phi) \tag{12.7}$$

所以，从式(12.6) 有

$$4 \mathcal{L}_\alpha^{(\tau)} G^{(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(\theta-\phi)} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{n^2}{\rho^2} + \right.$$

$$\left. 4nk\tau\rho^{2k-2} + 4k^2 \tau^2 \rho^{4k-2} - 4\alpha k^2 \tau \rho^{2k-2} \right\} G_n =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}\delta(\rho-R)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)} \tag{12.8}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2G_n}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}G_n}{\mathrm{d}\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}G_n-4nk\tau\rho^{2k-2}G_n-(4k^2\tau^2\rho^{4k-2}-4\alpha k^2\tau\rho^{2k-2})G_n=-\frac{1}{R}\delta(\rho-R) \tag{12.9}$$

故而需要解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left(\frac{n^2}{x^2}+4nk\tau x^{2k-2}+4k^2\tau^2x^{4k-2}-4\alpha k^2\tau x^{2k-2}\right)y=0 \tag{12.10}$$

首先，考虑 $\tau>0$ 的情形.

令

$$y=\frac{1}{x^k}W(2\tau x^{2k})$$

则方程式(12.10) 简化为

$$W''+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2k}}{2\tau x^{2k}}+\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{n}{2k}\right)^2}{(2\tau x^{2k})^2}\right]W=0 \tag{12.11}$$

这是下列 Whittaker 方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right]u=0$$

的一个特殊情形，解为 $M_{\kappa,\mu}(z)$ 和 $W_{\kappa,\mu}(z)$.

$M_{\kappa,\mu}$ 的定义中假设 $2\mu$ 不是一个负整数，所以当 $\tau>0$ 时，选取

$$y_1=\frac{1}{x^k}W_{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2k},\frac{|n|}{2k}}(2\tau x^{2k})$$

$$y_2=\frac{1}{x^k}M_{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2k},\frac{|n|}{2k}}(2\tau x^{2k})$$

通过参数变换，得到基本解为

$$y(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x_0)y_2(x)}{W(x_0)}, & x_0>x\\[2mm] \dfrac{y_1(x)y_2(x_0)}{W(x_0)}, & x_0<x\end{cases}$$

其中 $W=y_1'y_2-y_1y_2'$.

另外，已知

$$M_{\kappa,\mu}W'_{\kappa,\mu}-M'_{\kappa,\mu}W_{\kappa,\mu}=-\frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\alpha}{2}+\mu-\kappa\right)}$$

于是令 $\kappa=\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{n}{2k},\mu=\dfrac{|n|}{2k}$，有

$$y'_1y_2-y_1y'_2=\frac{4k\tau}{x}(W'_{\kappa,\mu}M_{\kappa,\mu}-W_{\kappa,\mu}M'_{\kappa,\mu})=$$

$$-\frac{4k\tau}{x}\frac{\Gamma\left(1+\dfrac{|n|}{k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\alpha}{2}+\dfrac{n+|n|}{2k}\right)}.$$

所以，当 $\rho<R$ 时，

$$G_n=-\frac{1}{R}\frac{y_1(R)y_2(R)}{W(R)}=$$

$$\frac{\Gamma\left(\dfrac{1-\alpha}{2}+\dfrac{n+|n|}{2k}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{k}\right)}\cdot\frac{1}{4k\tau R^n\rho^n}W_{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{k},\frac{n|}{k}}(2\tau R^{2k})\cdot$$

$$M_{\frac{\alpha}{2}\ \frac{n}{2k},\frac{|n|}{2k}}(2\tau\rho^{2k}) \tag{12.12}$$

现在，利用

$$\int^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}t^{\mu-1}(t+\beta)^{-\mu}I_{2\nu}(2t^{\frac{1}{2}}(t+\beta)^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2\Gamma(\mu+\nu)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta p}}{\alpha\beta\Gamma(2\nu+1)}M_{\frac{1}{2}-\mu,\nu}\left(\frac{\alpha^2\beta}{2s}\right)W_{\frac{1}{2}\ \mu,\nu}\left(\frac{\beta s}{2}\right) \tag{12.14}$$

其中 $\mathrm{Re}(\mu+\nu)>0$，$|\arg\beta|<\pi$，$\mathrm{Re}p>|\mathrm{Re}\alpha|$，$s=p+\sqrt{p^2-\alpha^2}$，

$$I_\mu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!\Gamma(\mu+k+1)}$$

令 $p=\rho^{2k}+R^{2k}$，$\alpha=2\rho^kR^k$，$\beta=2\tau$，$s=2R^{2k}$，有

$$G_n=\frac{1}{2k}\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma}\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{-\frac{n}{2k}}\cdot$$

$$I_{\frac{|n|}{k}}(2\tau|zw|^k\sqrt{\sigma^2-1})\frac{(\sigma+1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\mathrm{d}\sigma}{(\sigma-1)^{\frac{\sigma+1}{2}}} \tag{12.15}$$

因为 $G_n$ 关于 $\rho$ 和 $R$ 对称，所以可以去掉条件 $\rho<R$（或者 $|z|<|w|$）.

从而由式(12.7)得

$$\boldsymbol{K}^{(\tau)}=4G^{(\tau)}=$$

$$\frac{1}{k\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)}\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma}\cdot$$

$$\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{-\frac{n}{2k}}I_{\frac{|n|}{k}}(2\tau|zw|^k\sqrt{\sigma^2-1})\frac{(\sigma+1)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\sigma-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\mathrm{d}\sigma \tag{12.16}$$

令

$$j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{2k}}$$

则

$$\boldsymbol{K}^{(\tau)}=\frac{1}{k\pi}\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}I_{\frac{|n|}{k}}\cdot j^n\right)\cdot$$

$$\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \tag{12.17}$$

设

$$J=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}I_{\frac{|n|}{k}}\cdot j^n=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}I_{\frac{|n|}{k}}(j_n+j_{-n})$$

和

$$n = mk + l, \quad l = 0,1,2,\cdots,k-1$$

可得

$$J = \sum_{l=0}^{k-1} J_l$$

其中

$$J_0 = \sum_{m=0}^{\infty} I_{|m|} j^{km}, \quad J_l = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+\frac{l}{k}} \left( j^{mk+l} + \frac{1}{j^{mk+l}} \right)$$

所以

$$K^{(\tau)} = \sum_{l=0}^{k-1} K_l^{(\tau)} \tag{12.18}$$

其中

$$K_0^{(\tau)} = \frac{1}{k\pi} \int_1^{\infty} e^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{|m|}(2\tau \mid zw \mid^k \sqrt{\sigma^2 - 1}) \cdot$$

$$\left( e^{-i(\theta-\phi)} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} \right)^m \frac{(\sigma+1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(\sigma-1)^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\sigma \tag{12.19}$$

$$K_l^{(\tau)} = \frac{1}{k\pi} \int_1^{\infty} e^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+\frac{l}{k}}(2\tau \mid zw \mid^k \sqrt{\sigma^2 - 1}) \cdot$$

$$\frac{(\sigma-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(\sigma+1)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \left\{ \left[ e^{ik(\phi-\theta)} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} \right]^{m+\frac{l}{k}} + \right.$$

$$\left. \left[ e^{ik(\phi-\theta)} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} \right]^{-m-\frac{l}{k}} \right\} d\sigma \equiv K_{l,+}^{(\tau)} + K_{l,-}^{(\tau)} \tag{12.20}$$

而

$$K_{l,\pm}^{(\tau)} = \frac{1}{k\pi} \int_1^{\infty} e^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+\frac{l}{k}}(2\tau \mid zw \mid^k \sqrt{\sigma^2 - 1}) \cdot$$

$$\frac{(\sigma-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(\sigma+1)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \left( e^{ik(\phi-\theta)} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} \right)^{\pm\left(m+\frac{l}{k}\right)} d\sigma$$

从而,需要求和

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{m+\nu} I_{m+\nu}(z) \tag{12.21}$$

首先考虑

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u^m z^{m+\nu} I_{m+\nu}(z) \tag{12.22}$$

故而

$$\begin{aligned} g'(z) = & \sum_{m=0}^{\infty} u^m z \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)(z^{m+\nu} I_{m+\nu}(z)) = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} u^m z [z^{m+\nu-1} I_{m+\nu-1}(z)] = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} u^m z^{m+\nu} I_{m+\nu-1}(z) = \\ & z^{\nu} I_{\nu-1}(z) + u z^{1+\nu} I_{\nu}(z) + u^2 z^{2+\nu} I_{1+\nu} + \cdots \end{aligned}$$

即得 $g'(z) = z^{\nu} I_{\nu-1}(z) + uzg(z)$,这说明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}uz^2 g(z)}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}uz^2} z^{\nu} I_{\nu-1}(z)$$

积分得

$$g(z) = \mathrm{e}^{\frac{uz^2}{2}} \int_0^z t^{\nu} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}uz^2} I_{\nu-1}(t)\mathrm{d}t$$

或

$$g(z) = z^{1+\nu} \mathrm{e}^{\frac{uz^2}{2}} \int_0^1 s^{\nu} \mathrm{e}^{-\frac{uz^2}{2}s^2} I_{\nu-1}(zs)\mathrm{d}s \tag{12.23}$$

令 $a = uz$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a^{m+\nu} I_{m+\nu}(z) = & a^{\nu} z \mathrm{e}^{\frac{az}{2}} \int_0^1 s^{\nu} \mathrm{e}^{-\frac{az}{2}s^2} I_{\nu-1}(zs)\mathrm{d}s = \\ & a^{\nu} z \mathrm{e}^{\frac{az}{2}} \int_0^1 s^{\nu} \mathrm{e}^{-\frac{az}{2}s^2} \left(\frac{1}{2}zs\right)^{\nu-1} g_{\nu-1}\left(\frac{1}{2}zs\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{12.24}$$

其中

$$g_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!\Gamma(\nu-1,k+1)}$$

从而

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^{m+\nu} I_{m+\nu}(z) = 2\left(\frac{az}{2}\right)^\nu e^{\frac{az}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}azs^2} s^{2\nu-1} g_{\nu-1}\left(\frac{1}{2}zs\right) ds \tag{12.25}$$

令 $t = \sqrt{\frac{az}{2}} s$,可以得到

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^{m+\nu} I_{m+\nu}(z) = 2e^{\frac{1}{2}az} \int_0^{\sqrt{\frac{az}{2}}} e^{-t^2} t^{2\nu-1} g_{\nu-1}\left(\sqrt{\frac{z}{2a}} t\right) dt \tag{12.26}$$

注意到

$$a = e^{ik(\phi-\theta)} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}$$

$$z = 2\tau\rho^k R^k \sqrt{\sigma^2-1}$$

且

$$\nu = \frac{l}{k}, \quad l = 1,2,\cdots,k-1$$

所以

$$\frac{1}{2}az = \frac{1}{2}e^{ik\phi} e^{-ik\theta} 2\tau\rho^k R^k(\sigma-1) = \tau\bar{z}^k w^k(\sigma-1)$$

以及

$$\frac{z}{2a} = \frac{1}{2}e^{-ik\phi} e^{ik\theta} 2\tau\rho^k R^k(\sigma+1) = \tau z^k \bar{w}^k(\sigma+1)$$

从而

$$e^{-t^2} g_{\frac{l}{k}}\left(\sqrt{\frac{z}{2a}} t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{j+N=m} \frac{(-1)^j \left(\frac{z}{2a}\right)^N}{j!N!\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\right] t^{2m} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left\{\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}\frac{(-1)^{m-N}\left(\frac{z}{2a}\right)^{N}}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\right\}t^{2m} \tag{12.27}$$

注意到

$$\int_0^{\sqrt{\frac{az}{2}}} t^{2m+\frac{2l}{k}-1}\mathrm{d}t=\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{m+\frac{l}{k}}}{2\left(m+\frac{l}{k}\right)}$$

代入式(12.26)，得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}a^{m+\frac{l}{k}}I_{m+\frac{l}{k}}(z)=$$

$$\mathrm{e}^{\frac{az}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{m+\frac{l}{k}}}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}\frac{(-1)^{m+N}}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\left(\frac{z}{2a}\right)^{N}=$$

$$\mathrm{e}^{\tau\bar{z}^k w^k(\sigma-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\tau\bar{z}^k w^k(\sigma-1))^{m+\frac{l}{k}}}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}\frac{(-1)^{m+N}}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}(\tau z^k\overline{w}^k(\sigma+1))^{N} \tag{12.28}$$

因此当 $\tau>0$ 时，

$$K_{l,+}^{(\tau)}=\frac{1}{k\pi}\mathrm{e}^{-\tau\bar{z}^k w^k}\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)\sigma}\frac{(\sigma+1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(\sigma-1)^{\frac{\alpha+1}{2}}}\mathrm{d}\sigma\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\tau\bar{z}^k w^k(\sigma-1))^{m+\frac{l}{k}}}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\binom{m}{N}\frac{(-1)^N}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}[\tau z^k\overline{w}^k(\sigma+1)]^{N} \tag{12.29}$$

再次运用超几何函数的公式,其中 $a=b=1$, $\mu=\frac{1}{2}N+\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}$, $\nu=\frac{1}{2}m+\frac{l}{2k}+\frac{1}{4}(1-\alpha)$, $p=\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)$,可得

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)\sigma}(\sigma-1)^{m+\frac{l}{k}-\frac{1+\alpha}{2}}(\sigma+1)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\mathrm{d}\sigma= \\
&\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)2^{\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}\ \frac{1}{2}} \cdot \\
&\left[\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)\right]^{-\frac{m}{2}-\frac{N}{2}-\frac{l}{2k}-\frac{1}{2}} \cdot \\
&W_{\frac{a}{2}-\frac{m}{2}+\frac{N}{2}-\frac{l}{2k},\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}}(2\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k))
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
K_{l,+}^{(\tau)}=\ &\frac{1}{k\pi}\mathrm{e}^{-\tau z^k w^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)} \cdot \\
&\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}\frac{(-1)^N 2^{\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}(\bar{z}^k w^k)^{m+\frac{l}{k}}(z^k\bar{w}^k)^N \cdot \\
&(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)^{-\frac{m}{2}-\frac{N}{2}-\frac{l}{2k}-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}-\frac{1}{2}} \cdot \\
&W_{\frac{a}{2}-\frac{m}{2}+\frac{N}{2}-\frac{l}{2k},\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}}(2\tau(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k))
\end{aligned}
\tag{12.30}
$$

利用公式

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}t^{\nu-1}W_{\kappa,\mu}(at)\mathrm{d}t= \\
&\frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)a^{\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu-\kappa+1)\left(p+\frac{1}{2}a\right)^{\mu+\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \\
&F\left(\mu+\nu+\frac{1}{2},\mu-\kappa+1,\nu-\kappa+1,\frac{p-\frac{1}{2a}}{p+\frac{1}{2a}}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$\nu = \frac{m}{2} + \frac{N}{2} + \frac{l}{2k} + \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{K} = -\frac{m}{2} + \frac{N}{2} - \frac{l}{2k} + \frac{1}{2}\alpha$$

$$\mu = \frac{m}{2} + \frac{N}{2} + \frac{l}{2k}, \quad p = -\mathrm{i}(t-s) + \bar{z}^k w^k$$

$$a = 2(|z|^{2k} + |w|^{2k} - \bar{z}^k w^k)$$

$F$ 为超几何函数. 用 $\boldsymbol{K}_{l,+}^{+}$ 表示$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\tau} \boldsymbol{K}_{l,+}^{(\tau)} \mathrm{d}\tau$,则

$$\kappa_{l,+}^{+} = \frac{1}{4k\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha\right)} \cdot$$

$$\sum_{N=0}^{m} \binom{m}{N} (-1)^N \frac{\Gamma\left(m+N+\frac{l}{k}+1\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)} \cdot$$

$$(\bar{z}^k w^k)^{m+\frac{l}{k}} (z^k \overline{w}^k)^N (\overline{A})^{-m-N-\frac{l}{k}-1} \cdot$$

$$F\left(m+N+\frac{l}{k}+1, m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2},\right.$$

$$\left. m+\frac{l}{k}+\frac{3-\alpha}{2}, -\frac{A}{\overline{A}}(1-p^k)\right) \tag{12.31}$$

其中 $A = \frac{1}{2}(|z|^{2k} + |w|^{2k} + \mathrm{i}(t-s)), p = \frac{\bar{z}w}{A^{\frac{1}{k}}}$.

下面考虑 $\tau < 0$ 的情形.

对方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4(n-k\alpha)k\tau x^{2k-2} + 4k^2\tau^2 x^{4k-2}\right) y = 0$$

令

$$y = x^{\ k} W(-2\tau x^{2k})$$

有

$$W'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{n}{2k} - \alpha}{-2\tau x^{2k}} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{n^2}{4k^2}}{(-2\tau x^{2k})^2}\right) W = 0$$

则当 $\tau < 0$ 时，选取

$$y_1 = \frac{1}{x^k} W_{\frac{n}{2k} - \frac{\alpha}{2}, \frac{|n|}{2k}}(2 \mid \tau \mid x^{2k})$$

$$y_2 = \frac{1}{x^k} M_{\frac{n}{2k} - \frac{\alpha}{2}, \frac{|n|}{2k}}(2 \mid \tau \mid x^{2k})$$

与 $\tau > 0$ 时的推导一样，可得

$$G_n = \frac{1}{2k} \int_1^{+\infty} e^{-|\tau|(|z|^{2k} + |w|^{2k})\sigma} \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)^{\frac{n}{2k} - \frac{\alpha}{2}} \cdot$$

$$I_{\frac{|n|}{k}}(2 \mid \tau \mid \mid z \mid^k \mid w \mid^k (\sigma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \tag{12.32}$$

故由式(12.7)，有

$$\boldsymbol{K}^{(\tau)} = \frac{1}{k\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\phi - \theta)} \int_1^{\infty} e^{-|\tau|(|z|^{2k} + |w|^{2k})\sigma} \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)^{\frac{n}{2k}} \cdot$$

$$I_{\frac{|n|}{k}}(2 \mid \tau \mid \mid z \mid^k \mid w \mid^k (\sigma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) \frac{(\sigma + 1)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(\sigma - 1)^{\frac{1-\alpha}{2}}} d\sigma \tag{12.33}$$

令 $n = mk + l, l = 0, 1, \cdots, k - 1$，和

$$\boldsymbol{K}^{(\tau)} = \sum_{l=0}^{k-1} \boldsymbol{K}_l^{(\tau)}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_0^{(\tau)} = \frac{1}{k\pi} \int_1^{\infty} e^{-|\tau|(|z|^{2k} + |w|^{2k})\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_m(2 \mid \tau \mid \mid z \mid^k \mid w \mid^k (\sigma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) \cdot$$

$$\left[e^{i(\phi - \theta)} \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^m \frac{(\sigma + 1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{(\sigma - 1)^{\frac{1-\alpha}{2}}} d\sigma \tag{12.34}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_l^{(\tau)} = {} & \frac{1}{k\pi}\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma} \cdot \\
& \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+\frac{l}{k}}\left(2|\tau||z|^k|w|^k(\sigma^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)\left[\mathrm{e}^{ik(\phi-\theta)}\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{m+\frac{l}{k}} + \\
& \left[\mathrm{e}^{ik(\phi-\theta)}\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-m-\frac{l}{k}} \frac{(\sigma+1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{(\sigma-1)^{\frac{1-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\sigma = \\
& \boldsymbol{K}_{l,+}^{(\tau)} + \boldsymbol{K}_{l,-}^{(\tau)}
\end{aligned} \tag{12.35}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{l,\pm}^{(\tau)} = {} & \frac{1}{k\pi}\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma}\sum_{m=0}^{\infty} I_{m+\frac{l}{k}}\left(2|\tau||z|^k|w|^k(\sigma^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \\
& \left[\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{ik(\phi-\theta)}\right]^{\pm\left(m+\frac{l}{k}\right)} \frac{(\sigma+1)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(\sigma-1)^{\frac{1-\alpha}{2}}}\mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{12.36}
$$

类似于 $\tau>0$ 的情形，当 $\tau<0$ 时也有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{l,+}^{(\tau)} = {} & \frac{1}{k\pi}\mathrm{e}^{|\tau|\bar{z}^k w^k}\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)\sigma} \cdot \\
& \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}\frac{(-1)^{m+N}}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)} \cdot \\
& (|\tau|\bar{z}^k w^k(\sigma+1))^{m+\frac{l}{k}}(|\tau| z^k \bar{w}^k(\sigma-1))^{N}\frac{(\sigma+1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{(\sigma-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\mathrm{d}\sigma = \\
& \frac{1}{k\pi}\mathrm{e}^{|\tau|\bar{z}^k w^k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\sum_{N=0}^{m}(-1)^N\binom{m}{N}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)} \cdot \\
& (\bar{z}w)^{km+l}(z\bar{w})^{kN}(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)^{-\frac{m}{2}-\frac{N}{2}-\frac{l}{2k}-\frac{1}{2}} \cdot \\
& 2^{\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}}|\tau|^{\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}-\frac{1}{2}} \cdot \\
& W_{\frac{m}{2}-\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}-\frac{\alpha}{2},\frac{m}{2}+\frac{N}{2}+\frac{l}{2k}}\left(2|\tau|(|z|^{2k}+|w|^{2k}-\bar{z}^k w^k)\right)
\end{aligned} \tag{12.37}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{l,+} = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\tau}\boldsymbol{K}_{l,+}^{(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \\
& \frac{1}{4k\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\cdot\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}(-1)^N\cdot \\
& \frac{\Gamma\left(m+N+\frac{l}{k}+1\right)}{\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\cdot(\bar{z}w)^{km+l}(z\bar{w})^{kN}2^{m+N+\frac{l}{k}+1}\cdot \\
& (|z|^{2k}+|w|^{2k}-2\bar{z}^k w^k+\mathrm{i}(t-s))^{-m-N-\frac{l}{k}-1}\cdot \\
& F\left(m+N+\frac{l}{k}+1,N+\frac{1+\alpha}{2},N+\frac{3+\alpha}{2},-\frac{\bar{A}}{A}\cdot\frac{1}{1-p^k}\right)
\end{aligned}
\tag{12.38}
$$

利用超几何函数 $F(a,b,c,z)$ 的表达式,有

$$
\begin{aligned}
& F\left(m+N+\frac{l}{k}+1,m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2},m+\frac{l}{k}+\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2},-\frac{A}{\bar{A}}(1-p^k)\right)= \\
& \frac{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{3-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(-N-\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(-N+\frac{1-\alpha}{2}\right)}\left(\frac{A(1-p^k)}{\bar{A}}\right)^{-m-N-\frac{l}{k}-1}\cdot \\
& F\left(m+N+\frac{l}{k}+1,N+\frac{1+\alpha}{2},N+\frac{3+\alpha}{2},-\frac{\bar{A}}{A}\cdot\frac{1}{1-p^k}\right)+ \\
& \frac{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{3-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(m+N+\frac{l}{k}+1\right)\Gamma(1)}\left(\frac{A}{\bar{A}}(1-p^k)\right)^{-m-\frac{l}{k}-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}\cdot \\
& F\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2},0,-N+\frac{1-\alpha}{2},-\frac{\bar{A}}{A(1-p^k)}\right)
\end{aligned}
\tag{12.39}
$$

把式(12.39) 代入式(12.38),有

$$
\boldsymbol{K}_{l,+}=-\frac{1}{4k\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\cdot
$$

$$\sum_{N=0}^{m}(-1)^N\binom{m}{N}\frac{\Gamma\left(m+N+\frac{l}{k}+1\right)}{\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\cdot$$

$$(\overline{z}w)^{km+l}(z\overline{w})^{kN}(A(1-p^k))^{m-N-\frac{l}{k}-1}\cdot$$

$$F\left(m+N+\frac{l}{k}+1,N+\frac{1+\alpha}{2},N+\frac{3+\alpha}{2},-\frac{\overline{A}}{A}\cdot\frac{1}{1-p^k}\right)+$$

$$\frac{1}{4k\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\sum_{N=0}^{m}(-1)^N\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\cdot$$

$$(\overline{z}w)^{km+l}(z\overline{w})^{kN}A^{-m-\frac{l}{k}-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{N-\frac{1-\alpha}{2}}(1-p^k)^{m-\frac{l}{k}-\frac{1}{2}(1-\alpha)}$$

从而

$$\boldsymbol{K}_{l,+}=\boldsymbol{K}_{l,+}^{+}+\boldsymbol{K}_{l,+}^{-}$$

即

$$\boldsymbol{K}_{l,+}=\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-p^k)^{-\frac{l}{k}-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}(-1)^N\cdot$$

$$\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}\overline{p}^{kN}p^{km+l}\left((1-p^k)^{\frac{1}{k}}\right)^{km}=$$

$$\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{p^l}{(1-p^k)^{\frac{l}{k}+\frac{1}{2}(1-\alpha)}}\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{m!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\left(-\frac{p^k}{1-p^k}\right)^m\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{m}\binom{m}{N}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}(-\overline{p}^{k})^{N}$$

改变求和顺序，有

$$\boldsymbol{K}_{l,+}=\frac{1}{4k\pi^{2}}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{p^{l}}{(1-p^{k})^{\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}}}\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{N!\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}(-\overline{p}^{k})^{N}\cdot$$

$$\sum_{m=N}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{(m-N)!\left(m+\frac{l}{k}\right)}\left(-\frac{p^{k}}{1-p^{k}}\right)^{m}=$$

$$\frac{1}{4k\pi^{2}}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{p^{l}}{(1-p^{k})^{\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}}}\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{N!\Gamma\left(N+\frac{l}{k}\right)}(-\overline{p}^{k})^{N}\left(-\frac{p^{k}}{1-p^{k}}\right)^{N}\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+N+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{n+N+\frac{l}{k}}\left(-\frac{p^{k}}{1-p^{k}}\right)^{n}\frac{1}{n!}=$$

$$\frac{1}{4k\pi^{2}}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{p^{l}}{(1-p^{k})^{\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}}}\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(N+\frac{l}{k}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}+1\right)}\frac{1}{N!}\left(\frac{|p|^{2k}}{1-p^{k}}\right)^{N}\cdot$$

$$F\left(N+\frac{l}{k},N+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2},N+\frac{l}{k}+1,-\frac{p^{k}}{1-p^{k}}\right)$$

注意到

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\mathrm{d}t$$

得到

$$F\left(N+\frac{l}{k},N+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2},N+\frac{l}{k}+1,-\frac{p^k}{1-p^k}\right)=$$

$$\frac{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}+1\right)}{\Gamma\left(N+\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\cdot$$

$$\int_0^1 t^{N+\frac{l}{k}-\frac{1-\alpha}{2}}(1-t)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\left(1+\frac{p^k t}{1-p^k}\right)^{-N-\frac{l}{k}}\mathrm{d}t$$

故

$$\boldsymbol{K}_{l,+}=\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{p^l}{(1-p^k)^{\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}}}\cdot$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)\frac{1}{N!}\left(\frac{p^k\overline{p}^k}{1-p^k}\right)^N\cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\int_0^1 t^{N+\frac{l}{k}\ \frac{1+\alpha}{2}}(1-t)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\left(1+\frac{p^k t}{1-p^k}\right)^{-N-\frac{l}{k}}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{4k\pi^2}A^{\ \frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{p^l}{(1-p^k)^{\frac{l}{k}+\frac{1-\alpha}{2}}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1-\alpha}{2}\right)}{N!}(p^k\overline{p}^k)^N\cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\int_0^1 t^{N+\frac{l}{k}-\frac{1+\alpha}{2}}(1-t)^{\ \frac{1-\alpha}{2}}(1-p^k+p^k t)^{-N-\frac{l}{k}}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{\ \frac{1+\alpha}{2}}p^l(1-p^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_0^1 t^{\frac{l}{k}-\frac{1+\alpha}{2}}(1-t)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-p^k+p^k t)^{-\frac{l}{k}}\cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(N+\frac{1+\alpha}{2}\right)}{N!}\left(\frac{p^k\overline{p}^k t}{1-p^k+p^k t}\right)^N \mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}p^l(1-p^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_0^1 t^{\frac{l}{k}-\frac{1+\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-p^k+p^k t)^{-\frac{l}{k}}\cdot$$

$$\left(1-\frac{p^k\overline{p}^k t}{1-p^k+\overline{p}^k t}\right)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{l,+}=&\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}p^l(1-p^k)^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot\\&\int_0^1 t^{\frac{l}{k}-\frac{1+\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-p^k+p^k t)^{-\frac{l}{k}+\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\\&(1-p^k+p^k t-p^k\overline{p}^k t)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

利用代换 $s=\dfrac{t}{1-p^k+p^k t}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{l,+}=&\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}p^l\cdot\\&\int_0^1 s^{\frac{l}{k}-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-p^k s)^{-1}\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{12.40}$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{+}=&\sum_{l=0}^{k-1}\kappa_{l,+}=\\&\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot\\&(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-p^k s)^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1}(ps^{\frac{1}{k}})^l\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

所以

$$K_{+}=\frac{1}{4k\pi^{2}}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\int_{0}^{1}s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-ps^{\frac{1}{k}})^{-1}\mathrm{d}s \tag{12.41}$$

要从 $K_{+}$ 求得 $K^{(\tau)}$，注意到(见式(12.25)、式(12.32))当 $-\infty<\tau<+\infty$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，有

$$G_{n}(z,w,\tau,\alpha)=$$

$$\frac{1}{2k}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-|\tau|(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma}I_{\frac{|n|}{k}}(2|\tau||z|^{k}|w|^{k}\sqrt{\sigma^{2}-1})\cdot$$

$$\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\left(-\frac{n}{2k}+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{sgn}\tau}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\sigma^{2}-1}}$$

从而可得

$$G_{-n}(z,w,\tau,\alpha)=G_{n}(z,w,-\tau,-\alpha),\quad -\infty<\tau<+\infty \tag{12.42}$$

由于

$$K^{(\tau)}=4G^{(\tau)}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)}G_{n}=$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)}G_{n}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)}G_{n}+\frac{2}{\pi}G_{0}=$$

$$K_{+}^{(\tau)}+K_{-}^{(\tau)}+\frac{2}{\pi}G_{0}$$

且注意到 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，

$$K_{-}^{(\tau)}(z,w,\alpha)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-1}^{-\infty}G_{n}(z,w,\tau,\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)}=$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}G_{-n}(z,w,\tau,\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\phi)}=$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}G_{n}(z,w,-\tau,-\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\phi)}=$$

$$K_{+}^{(-\tau)}(\overline{z},\overline{w},-\alpha)$$

所以当 $-\infty<\tau<+\infty$ 时，

$$K^{(\tau)}(z,w,\alpha)=K_{+}^{(\tau)}(z,w,\alpha)+K_{+}^{(-\tau)}(\overline{z},\overline{w},-\alpha)+$$

$$\frac{2}{\pi}G_0(z,w,\tau,\alpha) \tag{12.43}$$

故

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}^{(\alpha)}(z,w,t-s)=\\&\boldsymbol{K}_+(z,w,t-s,\alpha)+\boldsymbol{K}_+(\overline{z},\overline{w},s-t,-\alpha)+\\&E_0^{(\alpha)}(z,w,t-s)\end{aligned} \tag{12.44}$$

其中 $E_0^{(\alpha)}(z,w,t-s)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\tau}G_0(z,w,\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau$.

为寻找 $E_0^{(\alpha)}$，我们注意到(见式(12.20)、式(12.36))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{0,+}^{(\tau)}=&\frac{1}{k\pi}\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau|(|z|^{2k}+|w|^{2k})\sigma}\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}\alpha\mathrm{sgn}\tau}\cdot\\&\sum_{m=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\phi)}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}\right)^{m\mathrm{sgn}\tau}\frac{I_m}{\sqrt{\sigma^2-1}}\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\phi)}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}\right)^{\mathrm{sgn}\tau}\right]^m I_m=\\&I_0+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\phi)}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}\right)^{\mathrm{sgn}\tau}\right]^{m+1}I_{m+1}=\\&I_0+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\phi)}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}\right)^{\mathrm{sgn}\tau}\right]^{m+\frac{l}{k}}I_{m+\frac{l}{k}}\end{aligned}$$

由式(12.36)可得

$$\boldsymbol{K}_{0,+}^{(\tau)}=\frac{2}{\pi}G_0+\boldsymbol{K}_{k,+}^{(\tau)}$$

或

$$\frac{2}{\pi}G_0=\boldsymbol{K}_{0,+}^{(\tau)}-\boldsymbol{K}_{k,+}^{(\tau)}$$

对变量 $\tau$ 进行 Fourier 逆变换，结合式(12.40)有

$$\begin{aligned}&E_0^{(\alpha)}=\boldsymbol{K}_{0,+}-\boldsymbol{K}_{k,+}=\\&\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

进一步注意到式(12.14)

$$G_0(z,w,\tau,\alpha)=G_0(z,w,-\tau,-\alpha)$$

因此

$$E_0(z,w,t-s,\alpha)=E_0(\bar{z},\bar{w},s-t,-\alpha)=$$

$$\frac{1}{2}(E_0(z,w,t-s,\alpha)+E_0(\bar{z},\bar{w},s-t,-\alpha))$$

结合 $A(\bar{z},\bar{w},s-t)=\bar{A}(z,w,t-s)$ 可知

$E_0^{(\alpha)}(z,w,t-s)=$

$$\frac{1}{8k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\left\{\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\mathrm{d}s\right\} \tag{12.45}$$

另外，由式(12.41)可知

$$\boldsymbol{K}_+(z,w,t-s,\alpha)+\boldsymbol{K}_+(\bar{z},\bar{w},s-t,-\alpha)=$$

$$\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\left\{\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-ps^{\frac{1}{k}})^{-1}\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-\bar{p}s^{\frac{1}{k}})^{-1}\mathrm{d}s\right\} \tag{12.46}$$

把式(12.45)、式(12.46)的等号右边代入式(12.44)，当 $-1<\mathrm{Re}\alpha<1$ 时，

$$\boldsymbol{K}^{(\alpha)}(z,w,t-s)=\frac{1}{8k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\left\{\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\bar{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s\right\} \tag{12.47}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&A=\frac{1}{2}(|z|^{2k}+|w|^{2k}+\mathrm{i}(t-s))\\&p=\frac{\bar{z}w}{A^{\frac{1}{k}}},\quad w\neq 0\\&p=0,\qquad w=0\end{aligned}\right\}\tag{12.48}$$

## 12.1.2 $K^{(\alpha)}(|Re\alpha|<1)$ 的另一形式

由于

$$(1-x)^{\beta}=F(1,\beta,1,x)=$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\beta}(1-xs)^{1}\mathrm{d}s$$

当 $\beta\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时成立,故

$$(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}=$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s\sigma)^{-1}\mathrm{d}\sigma$$

从而

$$\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1}{1-|p|^{2k}s\sigma}\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\tag{12.49}$$

类似地,

$$\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\bar{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\frac{1}{1-|p|^{2k}s\sigma}\frac{1+\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s$$

交换上式等号右边 $\sigma$ 和 $s$ 的位置，有

$$\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1}{1-|p|^{2k}s\sigma}\frac{1+\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma \tag{12.50}$$

由式(12.49)、式(12.50)可得

$$\int_0^1 s^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s\cdot$$

$$\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-\sigma)^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s\sigma)^{-1}\left(\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}+\frac{1+\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}}}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma=$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\int_0^1 s^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}s\sigma)^{-1}\frac{2(1-|p|^2(s\sigma)^{\frac{1}{k}})}{(1-ps^{\frac{1}{k}})(1-\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}})}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma=$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\int_0^1\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma}{(1-ps^{\frac{1}{k}})(1-\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}})\prod_{1\leqslant k\leqslant l-1}(1-\mathrm{e}^{\frac{2l\pi}{k}\mathrm{i}}\mid p\mid^2(\sigma s)^{\frac{1}{k}})}$$

结合式(12.47)可知:当 $k>1$ 时,

$$\boldsymbol{K}^{(\alpha)}=\frac{1}{4k\pi^2}\frac{A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot$$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma}{(1-ps^{\frac{1}{k}})(1-\overline{p}\sigma^{\frac{1}{k}})\prod_{1\leqslant k\leqslant l-1}(1-\mathrm{e}^{\frac{2l\pi}{k}\mathrm{i}}\mid p\mid^{2k}(\sigma s)^{\frac{l}{k}})}\tag{12.51}$$

当 $k=1$ 时

$$\boldsymbol{K}^{(\alpha)}=\frac{1}{4\pi^2}\frac{A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot$$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{(1-ps)(1-\overline{p}\sigma)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma\tag{12.52}$$

**注 12.1** 在第十三章,将证明 $|\alpha|\leqslant 1, p=1\Leftrightarrow(z,t)=(w,s)$,也就容易看出 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}$ 有唯一的奇异点 $(w,s)$. 进一步将证明 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}\in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R}^3)$ 和 $\mathcal{L}_\alpha\boldsymbol{K}^{(\alpha)}=\delta(z-w,t-s)$.

## 12.2 $|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1\left(\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1, m=0,1,2,\cdots\right)$

容易看出,当 $|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1$ 时,式(12.47)(或式(12.51))等号右边的积分将发散. 为了得到 $\mathcal{L}_\alpha$ 的基本解,只好改变 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}$ 的形式,使其解析性可以延拓至区域 $\{\alpha\in\mathbf{C}, |\mathrm{Re}\alpha|<1\}$ 之外. 为此,先暂时回到 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 的情形.

对式(12.47) 中的积分，令 $s=\sigma^k$ 可得

$$\boldsymbol{K}^{(\alpha)}=\frac{1}{8\pi^2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\left\{\int_0^1\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot\right.$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma+\int_0^1\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}\cdot$$

$$\left.(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}\sigma}{1-\bar{p}\sigma}\mathrm{d}\sigma\right\}\qquad(12.53)$$

下面考虑项

$$I(p,\alpha)=\int_0^1\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

$$(12.54)$$

用记号$\int_a^{b+}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$表示一个沿$\mathscr{C}$的回路积分，其中$\mathscr{C}$从点$a$出发，按反时针方向包围点$b$，然后回到点$a$，且使被积函数的所有奇点除$\sigma=b$外都在$\mathscr{C}$的外部. 由 Chauchy 定理可知积分值与$\mathscr{C}$的选取无关.

下面将证明：当$|\mathrm{Re}\alpha|<1,\alpha\neq1+\frac{2m}{k},m=1,2,\cdots,k-1$时，

$$I(p,\alpha)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k\pi}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k\pi}\int_1^{0^+}\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma\qquad(12.55)$$

实际上，选取$\mathscr{C}=C_\varepsilon(0)\cup\{[\varepsilon,1]\},\varepsilon>0$足够小，且$C_\varepsilon(0)=\{\sigma\in\mathbf{C},|\sigma|=\varepsilon\}$，由定义则有

$$\int_1^{0^+}\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma=$$

$$-\int_\varepsilon^1\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma+$$

$$\oint_{C_\varepsilon(0)} \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma +$$

$$\mathrm{e}^{2\pi\left[\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k-1\right]\mathrm{i}}\int_\varepsilon^1 \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

因为 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$,所以当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\oint_{C_\varepsilon(0)} \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma \to 0$$

从而令 $\varepsilon\to 0$ 可得

$$\int_1^{(0^+)} \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma =$$

$$(\mathrm{e}^{2\pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k\mathrm{i}}-1)\int_0^1 \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma =$$

$$2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{1-\alpha}{2}k\pi\mathrm{i}}\sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k\pi\int_0^1 \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

即给出了式(12.55),其中 $\alpha\neq 1-\dfrac{2m}{k}, m=1,2,\cdots,k-1$ 意味着 $\sin\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)k\pi\neq 0$.

类似地,可推得

$$I(p,\alpha)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1+\alpha}{2}\pi}}{2\mathrm{i}\sin\dfrac{1+\alpha}{2}\pi}\int_0^{1^+} \sigma^{-\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{12.56}$$

进一步,由式(12.55)、式(12.56)分别可知,当 $|\mathrm{Re}\alpha|<1, -\alpha\neq$

$1-\frac{2m}{k}, m=1,2,\cdots,k-1$ 时，

$$I(\bar{p},-\alpha)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)k\pi}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)k\pi}\int_0^{1^+}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}\sigma}{1-\bar{p}\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{12.57}$$

且

$$I(\bar{p},-\alpha)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1-\alpha}{2}\pi}}{2\mathrm{i}\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\int_0^{1^+}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}\sigma}{1-\bar{p}\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{12.58}$$

注意到如果 $\alpha\neq 1+\frac{2m}{k}, m=0,1,2,\cdots$，和 $\alpha\neq 1-\frac{2m}{k}, m=1,2,\cdots,k-1$，则当 $\mathrm{Re}\alpha>1$ 时，式(12.55)和式(12.58)的等号右边仍然有意义.

当 $\mathrm{Re}\alpha<1$ 时，式(12.56)和式(12.57)的等号右边只有 $-\alpha\neq 1+\frac{2m}{k}, m=0,1,2,\cdots$ 或 $-\alpha\neq 1-\frac{2m}{k}, m=1,2,\cdots,k-1$ 时有意义. 因此当 $|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1$，$\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1$ 时，自然地定义 $\kappa^{(\alpha)}$ 如下：

当 $\mathrm{Re}\alpha\geqslant 1, \alpha\neq\frac{2m}{k}+1, m=0,1,2,\cdots$ 时，

$$\boldsymbol{K}^{(\alpha)}=\frac{1}{(4\pi)^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k\pi}}{\mathrm{i}\sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k\pi}\int_1^{0^+}\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}\cdot\right.$$

$$(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}\mathrm{d}\sigma+$$

$$\frac{e^{i\frac{1-\alpha}{2}\pi}}{i\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\int_0^{1^+}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\left.(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}\sigma}{1-\bar{p}\sigma}d\sigma\right\} \tag{12.59}$$

当 $\mathrm{Re}\alpha\leqslant-1,-\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2,\cdots$ 时,

$$\boldsymbol{K}^{(\alpha)}=\frac{1}{(4\pi)^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\left\{\frac{e^{-i\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)k\pi}}{i\sin\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)k\pi}\int_1^{0^+}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}\cdot\right.$$

$$(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\bar{p}\sigma}{1-\bar{p}\sigma}d\sigma+$$

$$\frac{e^{i\frac{1+\alpha}{2}\pi}}{i\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi}\int_0^{1^+}\sigma^{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\left.(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma}{1-p\sigma}d\sigma\right\} \tag{12.60}$$

**注 12.2** 由上面的推导可以看出,当 $|\mathrm{Re}\alpha|<1,\pm\alpha\neq1-\frac{2m}{k},m=1,2,\cdots,k-1$ 时,由式(12.59)和式(12.60)定义的 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}$ 有意义,且和由式(12.53)所给出的一致.

# 第十三章　基本解的证明和实解析性

本章 13.1 节讨论 $\mathcal{L}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}$ 的一些重要性质；13.2 节给出基本解的证明；13.3 节研究基本解的实解析性.

## 13.1　$\mathcal{L}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}$ 的一些性质

**引理 13.1**　设

$$A = \frac{1}{2}(|z|^{2k} + |w|^{2k} + \mathrm{i}(t-s)) \tag{13.1}$$

且

$$\begin{aligned} p &= A^{-\frac{1}{k}}\bar{z}w, \quad w \neq 0 \\ p &= 0, \quad w = 0 \end{aligned} \tag{13.2}$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}, w = u + \mathrm{i}v \in \mathbf{C}, t, s \in \mathbf{R}$,则

(1) $|p| \leqslant 1$;

(2) $|p| = 1$ 当且仅当 $|z| = |w|$ 和 $t = s$;

(3) $p = 1$ 当且仅当$(z,t) = (w,s)$.

**证明**　由于

$$(1 - |p|^{2k}) = |A|^{-2}(|A|^2 - |z|^{2k}|w|^{2k}) = \frac{1}{4}|A|^{-2}[(|z|^{2k} - |w|^{2k}) + (t-s)^2] \geqslant 0$$

所以,引理 13.1 的结论(1) 和(2) 成立.

下面证明结论(3).

注意到 $p = 1 \Rightarrow |p| = 1 \Rightarrow |z| = |w|, t = s$,因此 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 且 $A = r^{2k}$,所以 $1 = p = A^{-\frac{1}{k}}\bar{z}w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}$,这表明 $\phi = \theta$ 及 $z = w$,所以 $p = 1 \Rightarrow (z,t) = (w,s)$. 反之显然成立,即$(z,t) =$

$(w,s) \Rightarrow p = 1$. 引理 13.1 的结论(3) 得证.

**引理 13.2** 设 $a \in \mathbf{C}$, $|a| \neq 1$,则存在独立于 $a$ 的常数 $C > 0$,使得

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{1 - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} \right| \mathrm{d}\phi \leqslant C\left(1 + \left| \ln \frac{1}{1 - |a|} \right| \right)$$

**证明** 令 $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0}$,

$$I = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{1 - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} \right| \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\phi_0)}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\phi_0)}} \right| \mathrm{d}\phi$$

因为被积函数是关于 $2\pi$ 为周期的函数,所以

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\phi_0)}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\phi_0)}} \right| \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} \right| \mathrm{d}\phi$$

则有

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{|(1 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1 - r\mathrm{e}^{\ \mathrm{i}\phi})|}{(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})} \mathrm{d}\phi =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|1 - r^2 + 2\mathrm{i}\sin\phi \cdot r|}{(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1 - r\mathrm{e}^{\ \mathrm{i}\phi})} \mathrm{d}\phi \leqslant$$

$$|1 - r^2| \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})} +$$

$$2r\int_0^{2\pi} \frac{|\sin\phi|}{1 - 2r\cos\phi + r^2} \mathrm{d}\phi$$

注意到

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1 - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}r} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z - r)\left(z - \dfrac{1}{r}\right)} =$$

$$-\frac{2\pi}{r} \begin{cases} \dfrac{1}{r - \dfrac{1}{r}}, & r < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\dfrac{1}{r} - r}, & r > 1 \end{cases}$$

从而

$$|1-r^2|\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{(1-re^{i\phi})(1-re^{-i\phi})}=2\pi$$

进一步

$$\begin{aligned}&2r\int_0^{2\pi}\frac{|\sin\phi|\,\mathrm{d}\phi}{1-2r\cos\phi+r^2}=\\&4r\int_0^{\pi}\frac{\sin\phi\mathrm{d}\phi}{1-2r\cos\phi+r^2}=\\&2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\ln(1-2r\cos\phi+r^2)=\\&2\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2=4\ln\left|\frac{1+r}{1-r}\right|\end{aligned}$$

因为

$$I\leqslant 2\pi+4\ln\left|\frac{1+r}{1-r}\right|\leqslant C\left(1+\left|\ln\frac{1}{|1-r|}\right|\right)$$

证毕.

**命题 13.1**　设 $G_{(1,0)}(z,t)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^3)$ 满足

$$\mathcal{L}_\alpha G_{(1,0)}(z,t)=\delta(z-1,t)\equiv\delta(x-1,y,t)\tag{13.3}$$

当 $w\neq 0$ 时,令

$$G_{(w,s)}=|w|^{2k}G_{(1,0)}\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^2},\frac{t-s}{|w|^{2k}}\right)$$

则 $w\neq 0$ 时,$G_{(w,s)}(z,t)$ 满足方程式

$$\mathcal{L}_\alpha G_{(w,s)}(z,t)=\delta(z-w,t-s)\tag{13.4}$$

其中 $\delta(z-w,t-s)$ 表示 $\delta(x-u,y-v,t-s)$,$z=(x,y)$,$w=(u,v)$.

**证明**　考虑下列算子

$$\begin{cases}R_a:C_0^\infty(\mathbf{R}^3)\to C_0^\infty(\mathbf{R}^3), & R_af(z,t)=f(a\cdot z,t)\\T_s:C_0^\infty(\mathbf{R}^3)\to C_0^\infty(\mathbf{R}^3), & T_sf(z,t)=f(z,t-s)\\S_\lambda:C_0^\infty(\mathbf{R}^3)\to C_0^\infty(\mathbf{R}^3), & S_\lambda f(z,t)=f(\lambda z,\lambda^{2k}t)\end{cases}\tag{13.5}$$

其中 $a\in\mathbf{C}$,$|a|=1$,$a=e^{i\theta}$,$z=x+iy$,$a\cdot z=(x\cos\theta-y\sin\theta,$

$x\sin\theta + y\cos\theta)$, $\lambda > 0$. 容易得到

$$\mathcal{L}_a \circ T_s = T_s \circ \mathcal{L}_a,\ \mathcal{L}_a \circ R_a = R_a \circ \mathcal{L}_a,\ \mathcal{L}_a \circ S_\lambda = \lambda^2 S_\lambda \circ \mathcal{L}_a \tag{13.6}$$

根据 $C_0^\infty$ 和 $\mathscr{D}'$ 之间的共轭关系可知,以上所定义的算子可以被延拓为 $\mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$,且公式(13.6)在 $\mathscr{D}'$ 上仍然成立.

一个简单的计算表明

$$T_s\delta(z,t) = \delta(z,t-s)$$

$$S_\lambda\delta(z,t) = \delta(\lambda z,\lambda^{2k}t) = \lambda^{-(2k+2)}\delta(z,t) \tag{13.7}$$

$$R_a\delta(z,t) = \delta(az,t) = \delta(z,t)$$

于是,由式(13.3)、式(13.5)可知

$$\begin{aligned} G_{(w,s)}(z,t) = {} & |w|^{-2k}T_sS_{\frac{1}{|w|}}R_{\frac{\bar{w}}{|w|}}G_{(1,0)}(z,t) = \\ & |w|^{2k}(T_s \circ S_{\frac{1}{|w|}} \circ R_{\frac{\bar{w}}{|w|}})G_{(1,0)}(z,t) \end{aligned} \tag{13.8}$$

因为 $\mathcal{L}_aG_{(1,0)}(z,t) = \delta(z-1,t)$,所以结合式(13.6)、式(13.8)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_aG_{(w,s)}(z,t) = {} & |w|^{-2k}(\mathcal{L}_a \circ T_s \circ S_{\frac{1}{|w|}} \circ R_{\frac{\bar{w}}{|w|}})G_{(1,0)}(z,t) = \\ & |w|^{-2k-2}(T_s \circ S_{\frac{1}{|w|}} \circ R_{\frac{\bar{w}}{|w|}} \circ \mathcal{L}_a)G_{(1,0)}(z,t) = \\ & |w|^{-2k-2}T_sS_{\frac{1}{|w|}} \circ R_{\frac{\bar{w}}{|w|}}\delta(z-1,t) = \\ & |w|^{-2k-2}T_sS_{\frac{1}{|w|}}\delta\left(\frac{\bar{w}z}{|w|}-1,t\right) = \\ & |w|^{-2k-2}\delta\left(\frac{\bar{w}z}{|w|^2}-1,\frac{t-s}{|w|^{2k}}\right) = \\ & |w|^{-2k-2}\delta\left(\frac{\bar{w}(z-w)}{|w|^2},\frac{t-s}{|w|^{2k}}\right) = \\ & \delta\left(\frac{\bar{w}}{|w|}(z-w),t-s\right) = \delta(z-w,t-s) \end{aligned}$$

完成命题的证明. 证毕.

**注 13.1** 命题 13.1 表明为了寻找算子 $\mathcal{L}_a$ 的基本解,记为

$G_{(w,s)}(z,t)$，只须考虑$(w,s)=(1,0)$，$(w,s)=(0,0)$这两种特殊情形就足够了.

**注 13.2**　令

$$A_{(w,s)}(z,t)=\frac{1}{2}(|z|^{2k}+|w|^{2k}+\mathrm{i}(t-s)) \tag{13.9}$$

$$P_{(w,s)}(z,t)=(A_{(w,s)}(z,t))^{-\frac{1}{k}}\bar{z}w \tag{13.10}$$

$$F_{(w,s)}^{(\alpha)}(z,t)=\boldsymbol{K}^{(\alpha)}(z,w,t-s) \tag{13.11}$$

通过简单计算可知：当 $w\neq 0$ 时，

$$A_{(w,s)}(z,t)=|w|^{2k}A_{(1,0)}\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^{2}},\frac{t-s}{|w|^{2k}}\right) \tag{13.12}$$

$$P_{(w,s)}(z,t)=P_{(1,0)}\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^{2}},\frac{t-s}{|w|^{2k}}\right) \tag{13.13}$$

结合式(12.47)、式(12.59)、式(12.60)可知 $w\neq 0$ 时，

$$F_{(w,s)}^{(\alpha)}(z,t)=|w|^{-2k}F_{(1,0)}^{(\alpha)}\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^{2}},\frac{t-s}{|w|^{2k}}\right) \tag{13.14}$$

所以，由命题 13.1 和式(13.11)、式(13.14)可知：要证明 $\boldsymbol{K}^{(\alpha)}$ 是算子 $\mathcal{L}_\alpha$ 的一个基本解，只须证明

$$\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)}(z,t)=\delta(z-1,t) \tag{13.15}$$

和

$$\mathcal{L}_\alpha F_{(0,0)}^{(\alpha)}(z,t)=\delta(z,t) \tag{13.16}$$

成立.

**命题 13.2**　只要 $\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1, m=0,1,2,\cdots$，则 $F_{(w,s)}^{(\alpha)}\in C^{\infty}(\mathbf{R}^3\backslash\{(w,s)\})\cap L_{\mathrm{loc}}^{1}(\mathbf{R}^3)$. 这里把 $\mathbf{C}$ 平面与 $\mathbf{R}^2$ 等同起来，并且用$(z,t)$表示$(x,y,t)\in\mathbf{R}^3$，用$(w,s)$表示$(u,v,s)\in\mathbf{R}^3$.

**证明**　由式(13.14)可知只须证明

$$F_{(1,0)}^{(\alpha)}\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^3\backslash\{(1,0)\})\cap L_{\mathrm{loc}}^{1}(\mathbf{R}^3) \tag{13.17}$$

和

$$F_{(0,0)}^{(\alpha)}\in C^{\infty}(\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0)\})\cap L_{\mathrm{loc}}^{1}(\mathbf{R}^3) \tag{13.18}$$

两式成立即可.

首先考虑 $|\operatorname{Re}\alpha|<1$ 的情形. 当 $|\operatorname{Re}\alpha|<1$ 时,

$$A_{(1,0)}(z,t)=\frac{1}{2}(|z|^{2k}+1+\mathrm{i}t)$$

$$\overline{A}_{(1,0)}(z,t)=\frac{1}{2}(|z|^{2k}+1-\mathrm{i}t)$$

$$P_{(1,0)}(z,t)=(A_{(1,0)})^{-\frac{1}{k}}\overline{z}$$

$$\overline{P}_{(1,0)}(z,t)=(\overline{A}_{(1,0)})^{-\frac{1}{k}}z$$

故 $A,\overline{A},P,\overline{P}$ 都属于 $C^{\infty}(\mathbf{R}^3)$,从而 $A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ 也属于 $C^{\infty}(\mathbf{R}^3)$,这里用原来的记号 $A,P$,而没有用记号 $A_{(1,0)},P_{(1,0)}$.

现再考虑式(12.51)的等号右边. 注意到

$$\begin{aligned}|1-\mathrm{e}^{\frac{2l\pi}{k}\mathrm{i}}|p|^2\sigma s|&=\left(1-2\cos\frac{2l\pi}{k}\cdot|p|^2\sigma s+|p|^4\sigma^2s^2\right)^{\frac{1}{2}}=\\&\left((|p|^2\sigma s-\cos\frac{2l\pi}{k})^2+\left(\sin\frac{2l\pi}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\\&\begin{cases}\left|\sin\dfrac{2l\pi}{k}\right|, & \dfrac{l}{k}\neq\dfrac{1}{2}\\ 1, & \dfrac{l}{k}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

这里用到 $\sigma\geqslant0,s\geqslant0$,当 $\dfrac{l}{k}=\dfrac{1}{2}$ 时, $|1-\mathrm{e}^{\frac{2l\pi}{k}}|p|^2\sigma s|=1+|p|^2\sigma s\geqslant1$. 于是

$$\left|\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}(1-\mathrm{e}^{\frac{2l\pi}{k}\mathrm{i}}|p|^2\sigma s)\right|\geqslant\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1,l\neq\frac{k}{2}}\left|\sin\frac{2l\pi}{k}\right|=C(k)>0 \tag{13.19}$$

所以 $F_{(1,0)}^{(\alpha)}(z,t)$ 的奇异点一定在 $p=1$ 的点处. 但是根据引理 13.1 可知,这正好是点(1,0),从而 $F_{(1,0)}^{(\alpha)}\in C^{\infty}(\mathbf{R}^3\setminus\{(1,0)\})$.

为证 $F_{(1,0)}^{(\alpha)}\in L_{\mathrm{loc}}^{1}(\mathbf{R}^3)$,结合极坐标 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,取 $\mathbf{R}^3$ 的紧子集

$\Omega_R=\{(z,t):\rho^{2k}+t^2\leqslant R^2$，只须证明：任取 $R>0$，$\int_{\Omega_R}|F^{(\alpha)}_{(1,0)}(z,t)|\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}t\leqslant C_k$.

注意到 $A=A(\rho,t)$，即 $A$ 独立于 $\theta$ 和 $p=A^{-\frac{1}{k}}\rho e^{i\theta}$，所以由引理 13.2 可知当 $|p|\leqslant 1$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+p\sigma^{\frac{1}{k}}}{1-p\sigma^{\frac{1}{k}}}\right|\mathrm{d}\theta-\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+\sigma^{\frac{1}{k}}A^{-\frac{1}{k}}\rho e^{i\theta}}{1-\sigma^{\frac{1}{k}}A^{-\frac{1}{k}}\rho e^{i\theta}}\right|\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$C\left(1+\ln\frac{1}{1-\sigma^{-\frac{1}{k}}|A|^{-\frac{1}{k}}\rho}\right)\leqslant$$

$$C\left(1+\left|\ln\frac{1}{1-|A^{-\frac{1}{k}}z|}\right|\right)=$$

$$C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)\leqslant C\left(1+\ln\frac{2k}{1-|p|^{2k}}\right)$$

在 $\Omega_R$ 上，

$$1-|p|^{2k}=|A|^{-2}(|A|^2-\rho^{2k})=$$

$$\frac{1}{4}|A|^{-2}((\rho^{2k}+1)^2+t^2-4\rho^{2k})=$$

$$\frac{1}{4}|A|^{2}((\rho^{2k}-1)^2+t^2)\geqslant$$

$$C_R((\rho^{2k}-1)^2+t^2)$$

由于 $A$ 和 $A^{-1}$ 都是连续的，故在 $\Omega_R$ 上均为有界. 这里和以后均用同样的记号 $C_R$，而不用记号 $C'_R,C''_R,\cdots$. 从而

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+p\sigma^{\frac{1}{k}}}{1-p\sigma^{\frac{1}{k}}}\right|\mathrm{d}\theta\leqslant C_R\left(1+\ln\frac{1}{(\rho^{2k}-1)^2+t^2}\right)$$

令 $\alpha'=\mathrm{Re}\alpha$，有

$$\int_0^1\left|\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right|\mathrm{d}\sigma\leqslant$$

$$\int_0^1\sigma^{\frac{1-\alpha'}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}\mathrm{d}\sigma(1-|p|^{2k})^{-\frac{1+\alpha'}{2}}=$$

$$B\left(\frac{1-\alpha'}{2},\frac{1+\alpha'}{2}\right)(1-|p|^{2k})^{-\frac{1+\alpha'}{2}} \leqslant$$

$$C_{R,\alpha}((\rho^{2k}-1)^2+t^2)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}$$

这里用到 $B\left(\frac{1-\alpha'}{2},\frac{1+\alpha'}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha'}{2}\pi}$. 所以

$$I=\int_{\Omega_R}\left|\frac{1}{8k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\int_0^1\sigma^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+p\sigma^{\frac{1}{k}}}{1-p\sigma^{-\frac{1}{k}}}\mathrm{d}\sigma\right|\mathrm{d}\phi(\rho\mathrm{d}\rho)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\int_{\rho^{2k}+t^2\leqslant R^2}((\rho^{2k}-1)^2+t^2)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}\cdot$$

$$\left(1+\left|\ln\frac{1}{(\rho^{2k}-1)^2+t^2}\right|\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\int_0^{2\pi}\int_0^{R^{2k}}r^{-(1+\alpha')}\left(1+\left|\ln\frac{1}{r^2}\right|\right)\frac{r}{2k}(1+r\cos\phi)^{\frac{1}{k}-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

结合 $|\alpha'|<1, k\geqslant 1$ 可知

$$I\leqslant C_{R,\alpha}\int_0^{R^{2k}}r^{\alpha'}|1-r|^{\frac{1}{k}-1}\left|\ln\frac{1}{r}\right|\mathrm{d}r < C_{R,\alpha}$$

类似地，对式(12.47) 等号右边积分的第二项在 $\Omega_R$ 上可得到同样的估计，故

$$\int_{\Omega_R}|F_{(1,0)}^{(\alpha)}|\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}t < C_R$$

对 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 成立. 由于 $R>0$ 的任意性，就有 $F_{(1,0)}\in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R}^3)$，因此对 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 的情形，式(13.17) 成立. 下面考虑 $|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1$, $\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1, m=0,1,2,\cdots$ 的情形. 由式(12.59)、式(12.60) 可知

$$F_{(1,0)}^{(-\alpha)}(z,t)=F_{(1,0)}^{(\alpha)}(\overline{z},-t) \tag{13.20}$$

所以只须考虑 $\mathrm{Re}\alpha\geqslant 1, \alpha\neq\frac{2m}{k}+1$ 的情形. 另外，如注 12.2 中所

述，只要 $\alpha \neq 1-\frac{2m}{k}, m=1,2,\cdots,k-1$，当 $-1<\mathrm{Re}\alpha<1$ 时，式(12.59)仍然成立. 由于一些估计以后还会用到，在下面证明过程中仍然考虑这些情形. 进一步，由于它们之间彼此相似，将考虑式(12.59)等号右边两项.

令

$$f(\sigma)=\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^{k})^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^{k})^{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\overline{p}\sigma}{1-\overline{p}\sigma}$$

和

$$J_{\alpha}(z,t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1-\alpha}{2}\pi}}{\mathrm{i}\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\int_{0}^{1^{+}}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

由定义可知，除 $\sigma=1$ 外，$f$ 的所有奇异点都在回路积分的回路之外，所以选取回路为

$$C=[0,\delta]\cup C_{\delta}$$

其中 $C_{\delta}=\{\sigma: |\sigma-1|=\delta\}, \delta=\delta_{0}(1-|p|), 0<\delta_{0}<\frac{1}{4}\min\limits_{1\leqslant l\leqslant k-1}\{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}|\}$. 从而

$$J_{\alpha}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1-\alpha}{2}\pi}}{\mathrm{i}\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\left[\int_{0}^{1-\delta}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\oint_{|\sigma-1|=\delta}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\mathrm{e}^{-\frac{1+\alpha}{2}2\pi\mathrm{i}}\int_{1-\delta}^{0}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]=$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1-\alpha}{2}\pi}}{\mathrm{i}\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\left((1-\mathrm{e}^{-\frac{1+\alpha}{2}2\pi\mathrm{i}})\int_{0}^{1}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\oint_{|\sigma-1|=\delta}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)$$

当 $|z|\neq 1$ 时，

$$J_{\alpha}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1-\alpha}{2}\pi}}{\mathrm{i}\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\oint_{|\sigma-1|=\delta}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^{k})^{\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\overline{p}\sigma}{1-\overline{p}\sigma}\mathrm{d}\sigma+$$

$$2\int_0^{1-\delta}\sigma^{\frac{1+a}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+a}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1-a}{2}}\frac{1+\overline{p}\sigma}{1-\overline{p}\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{13.21}$$

如前,令 $z=\rho e^{i\theta}$,再次结合引理 13.2 可得

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+\sigma\overline{p}}{1-\sigma\overline{p}}\right|\mathrm{d}\theta\leqslant C\left(1+\left|\ln\left|\frac{1}{1-|\sigma p|}\right|\right|\right)$$

当 $\sigma\in C_\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}1-|\sigma||p|=1-|p|+(1-|\sigma|)|p|\geqslant\\ 1-|p|-|\sigma-1||p|\geqslant\\ 1-|p|-|\sigma-1|=\\ (1-\delta_0)(1-|p|)\geqslant\\ \frac{1}{2}(1-|p|)\end{aligned}$$

所以当 $\sigma\in C_\delta$ 时,

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+\sigma\overline{p}}{1-\sigma\overline{p}}\right|\mathrm{d}\sigma\leqslant C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)$$

进一步,因为 $|z^a|\leqslant|z|^{\mathrm{Re}a}e^{2\pi|\mathrm{Im}a|}$,所以

$$|\sigma^{\frac{1+a}{2}k-1}|\leqslant e^{k\pi|\mathrm{Im}a}2^{k\frac{1+a'}{2}-1}$$

当 $1\leqslant l\leqslant k-1$ 时,

$$\begin{aligned}|\sigma-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|\geqslant|1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|-|\sigma-1|\geqslant\\ |1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|-\frac{1}{4}|1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}||1-p|\geqslant\\ \frac{1}{2}|1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}|1-\sigma^k|=\left(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}|\sigma-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|\right)\cdot|\sigma-1|\geqslant\\ \left(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}\frac{1}{2}|1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|\right)|\sigma-1|\end{aligned}$$

从而 $|1-\sigma^k|\geqslant C_k\cdot\delta_0(1-|p|)$,其中 $C_k=\prod\limits_{1\leqslant l\leqslant k-1}\frac{1}{2}|1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}|$.
这表明

$$|(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}|\leqslant e^{\pi|\mathrm{Im}\alpha|}|1-\sigma^k|^{-\frac{1+\alpha'}{2}}\leqslant C(\alpha)(|1-|p||)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}$$

当 $\delta_0<\frac{1}{2C_k}$ 时,因为

$$\begin{aligned}&|1-|p|^{2k}+(1-\sigma^k)|p|^{2k}|\leqslant\\&k(1-|p|+|1-\sigma|)\leqslant C(1-|p|)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&|1-|p|^{2k}+(1-\sigma^k)|p|^{2k}|\geqslant\\&1-|p|-C_k\delta_0(1-|p|)\geqslant\frac{1}{2}(1-|p|)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&|(1-|p|^{2k}\sigma^k)|^{-\frac{1-\alpha}{2}}\leqslant\\&e^{\pi|\mathrm{Im}\alpha|}|1-|p|^{2k}\sigma^k|^{-\frac{1-\alpha'}{2}}=\\&e^{\pi|\mathrm{Im}\alpha|}|1-|p|^{2k}+(1-\sigma^k)|p|^{2k}|^{\frac{1-\alpha'}{2}}\leqslant\\&C_\alpha(1-|p|)^{\frac{1-\alpha'}{2}}\end{aligned}$$

以上的估计表明

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\oint_{C_\delta}\left|\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\sigma\bar{p}}{1-\sigma\bar{p}}\right|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\phi\leqslant\\&C_\alpha(1-|p|)^{-1}\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)\oint_{|\sigma-1|=\delta}\mathrm{d}\sigma=\\&C_\alpha 2\pi\delta_0\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)\end{aligned}\qquad(13.22)$$

下面考虑在区域$[0,1-\delta]$上的积分. 利用引理 13.2 有,对 $\sigma\in[0,1-\delta]$,有

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+\bar{p}\sigma}{1-\bar{p}\sigma}\right|\mathrm{d}\phi\leqslant C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)$$

当 $\sigma \in [0,1-\delta]$，$\alpha' > -1$ 时，如果 $\alpha' \geqslant 1$，

$$(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha'}{2}} \leqslant (1-\sigma)^{-1}$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha'}{2}} \leqslant 1$$

如果 $\alpha' < 1$，

$$(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha'}{2}} \leqslant (1-\sigma)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}$$

$$(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha'}{2}} \leqslant (1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha'}{2}}$$

所以当 $\alpha' > -1$，$\sigma \in [0,1-\delta]$ 时，

$$(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha'}{2}} \leqslant (1-\sigma)^{-1}$$

因此

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\delta} \left|\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \cdot (1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\right| \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\phi \leqslant$$

$$C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)\int_0^{1-\delta} \sigma^{\frac{1+\alpha'}{2}k-1} \cdot$$

$$(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha'}{2}}\mathrm{d}\sigma \leqslant$$

$$C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)\int_0^{1-\delta}(1-\sigma)^{-1}\mathrm{d}\sigma =$$

$$C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)\ln\frac{1}{\delta}$$

注意到 $\delta = \delta_0(1-|p|)$，因此

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\delta} \left|\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\sigma^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\right| \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\phi \leqslant$$

$$C\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)^2 \tag{13.23}$$

由式(13.22)、式(13.23)有

$$\int_0^{2\pi} |J_\alpha| \mathrm{d}\phi \leqslant C_\alpha\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|}\right)^2 \leqslant C_\alpha\left(1+\ln\frac{1}{1-|p|^{2k}}\right)$$

如 $|\mathrm{Re}\alpha| < 1$ 时的处理，有

$$\int_{\Omega_R} \frac{1}{8k\pi^2}\left|A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}J_\alpha\right| \mathrm{d}\Omega_R \leqslant$$

$$C_{\alpha,R}\int_0^{R^{2k}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^2 \mid 1-r\mid^{\frac{1}{k}-1}\mathrm{d}r=$$
$$C_R(\alpha)<+\infty$$

类似地,针对式(12.59)等号右边的第一项可以得到同样的估计.因此当$|\mathrm{Re}\alpha|<1$时,$F^{(\alpha)}_{(1,0)}\in C^\infty(\mathbf{R}^3\backslash\{(1,0,0)\})$.对$\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2\cdots$,即$|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1$的情形,为了证明$F^{(\alpha)}_{(1,0)}\in C^\infty(\mathbf{R}^3\backslash\{(1,0,0)\})$,需要类似于式(12.59)、式(12.51)的更一般形式,这个将在13.3节给出,在那里将证明$E^{(\alpha)}_{(w,s)}$对$(z,t)$除对角线$(z,t)=(w,s)$外是实解析的.

最后,考虑$F^{(\alpha)}_{(0,0)}(z,t)$.

由$p$的定义(见式(12.47))可知$w=0$时$p<0$,由式(12.47)有

$$F^{(\alpha)}_{(0,0)}=a_\alpha A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}=a_\alpha\mid A\mid^{-1}\left(\frac{A}{\overline{A}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}=$$
$$a_\alpha\frac{1}{(\mid z\mid^{4k}+t^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\mid z\mid^{2k}+\mathrm{i}t}{\mid z\mid^{2k}-\mathrm{i}t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\tag{13.24}$$

其中$a_\alpha=\frac{1}{2k\pi}\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\pi}$,$\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2,\cdots$,从而$F^{(\alpha)}_{(0,0)}\in L^{(1)}_{\mathrm{loc}}\cap C^\infty(\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\})$.

命题13.2证明完成.

**注13.3**　命题13.2的证明过程表明,对每一个紧子集$\Omega\subset\mathbf{R}^3$,存在常数$C(\alpha,\Omega)$,当$\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2\cdots$时,

$$\int_\Omega|F^{(\alpha)}_{(1,0)}(z,t)|\mathrm{d}\Omega\leqslant C(\alpha,w)\tag{13.25}$$

且

$$|C(\alpha,\Omega)|\leqslant C(\Omega)\left|\frac{1}{\sin\frac{1\pm\alpha}{2}k\pi}\right|\tag{13.26}$$

## 13.2 当 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 时,基本解的证明

**命题 13.3**

$$\mathcal{L}_\alpha F^{(\alpha,\epsilon)}_{(1,0)}(z,t)=\frac{k}{4\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{|z|^{2k-2}}{|A|^2}\int_0^{1-\epsilon}\left\{\frac{1+\alpha}{4}\cdot\right.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left[\sigma^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-\sigma)^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\frac{1+\sigma^{\frac{1}{k}}p}{1-\sigma^{\frac{1}{k}}p}\right]+\frac{1-\alpha}{4}\cdot$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left[\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-\sigma)^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}-1}\frac{1+\sigma^{\frac{1}{k}}\overline{p}}{1-\sigma^{\frac{1}{k}}\overline{p}}\right]\right\}\mathrm{d}\sigma \quad (13.27)$$

**证明** 因为

$$A=\frac{1}{2}(z^k\overline{z}^k+1+\mathrm{i}t),\quad \overline{A}=\frac{1}{2}(z^k\overline{z}^k+1-\mathrm{i}t),$$

$$Z=\frac{\partial}{\partial z}+\mathrm{i}kz^{k-1}\overline{z}^k\frac{\partial}{\partial t},\quad \overline{Z}=\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mathrm{i}k\overline{z}^{k-1}z^k\frac{\partial}{\partial t},$$

所以

$$ZA=\frac{1}{2}kz^{k-1}\overline{z}^k-\frac{1}{2}kz^{k-1}\overline{z}^k=0,\qquad \overline{Z}A=0,$$

$$Z\overline{A}=kz^{k-1}\overline{z}^k,\qquad \overline{Z}A=kz^k\overline{z}^{k-1},$$

$$Z\overline{z}^k=0,\qquad \overline{Z}z^k=0,$$

$$Z\rho=Z(A^{-\frac{1}{k}}\overline{z})=0,\qquad \overline{Z}\overline{\rho}=\overline{Z}((\overline{A})^{\frac{1}{k}}z)=0,$$

$$Z\overline{\rho}=(\overline{A})^{-\frac{1}{k}-1}(\overline{A}-z^k\overline{z}^k),\qquad \overline{Z}\rho=(A)^{\frac{1}{k}-1}(A-z^k\overline{z}^k)$$

令

$$V=A^{\frac{1-\alpha}{2}}(\overline{A})^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-p^k\overline{\rho}^ks)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}=$$

$$A^\alpha(A\overline{A}-z^k\overline{z}^ks)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\equiv A^\alpha BC^{-\frac{1+\alpha}{2}}$$

其中 $B=\dfrac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}$，$C=(A\overline{A}-z^k\overline{z}^k s)$. 从而 $ZB=0$，

$$\overline{Z}B=\left(\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\right)'_p\overline{Z}\rho=k\frac{s}{p}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}\overline{Z}\rho=$$

$$k\frac{s}{p}A^{-\frac{1}{k}-1}(A-z^k\overline{z}^k)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}$$

从而 $\overline{Z}B=ks\overline{Z}^{-1}A^{-1}(A-z^k\overline{z}^k)\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}$. 又

$$ZC=AZ\overline{A}-z^kZ\overline{z}^ks=kz^{k-1}\overline{z}^k(A-s)$$

而且

$$\overline{Z}C=kz^k\overline{z}^{k-1}(\overline{A}-s)$$

因此

$$ZV=Z(A^\alpha BC^{-\frac{1+\alpha}{2}})=A^\alpha BZC^{-\frac{1+\alpha}{2}}=$$

$$-\frac{1+\alpha}{2}A^\alpha BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}ZC=$$

$$-\frac{1+\alpha}{2}kz^{k-1}\overline{z}^k(A-s)A^\alpha BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}$$

$$\overline{Z}ZV=-\frac{1+\alpha}{2}kz^{k-1}\overline{Z}[\overline{z}^k(A^{\alpha+1}-sA^\alpha)BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}]=$$

$$-\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}(A-s)A^\alpha BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{2k-1}\overline{z}^{2k-1}((\alpha+1)A-\alpha s)A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}s(A-s)(A-z^k\overline{z}^k)A^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1+\alpha}{2}+1\right)k^2z^{2k-1}\overline{z}^{2k-1}(A-s)(\overline{A}-s)A^\alpha BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}=$$

$$-\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}[AA+Az^k\overline{z}^k(\alpha+1)-$$

$$(A+\alpha z^k\overline{z}^k)s]A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}s(A-s)(A-z^k\overline{z}^k)A^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1+\alpha}{2}+1\right)k^2z^{2k-1}\overline{z}^{2k-1}(A-s)(\overline{A}-s)A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}$$

$$\overline{Z}V=\overline{Z}(A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}})=$$

$$\alpha kz^k\overline{z}^{k-1}A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}}+$$

$$ks\overline{z}^{-1}(A-z^k\overline{z}^k)A^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}kz^k\overline{z}^k(\overline{A}-s)A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}$$

因此

$$Z\overline{Z}V=\alpha k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}}-$$

$$\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}k^2z^{2k-1}\overline{z}^{2k-1}(A-s)A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$k^2sz^{k-1}\overline{z}^{k-1}A^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2sz^{k-1}\overline{z}^{k-1}(A-z^k\overline{z}^k)(A-s)A^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}(\overline{A}-s)A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{2k-1}\overline{z}^{2k-1}A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1+\alpha}{2}+1\right)k^2z^{2k-1}\overline{z}^{2k-1}(\overline{A}-s)(A-s)A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}=$$

$$k^2z^{k-1}\overline{z}^{k-1}\left[\frac{\alpha-1}{2}A\overline{A}-\frac{(\alpha+1)^2}{2}z^k\overline{z}^kA+\right.$$

$$\left.\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^k\overline{z}^k+\frac{\alpha+1}{2}A\right)s\right]A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}-$$

$$k^2 z^{k-1}\bar{z}^{k-1} sA^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot$$

$$\left\{A\bar{A}+\frac{1+\alpha}{2}A(A-z^k\bar{z}^k)-\left[z^k\bar{z}^k+\frac{1+\alpha}{2}(A-z^k\bar{z}^k)\right]s\right\}+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1+\alpha}{2}+1\right)k^2 z^{2k-1}\bar{z}^{2k-1}(\bar{A}-s)(A-s)A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}$$

$$-\mathcal{L}_{\alpha}V=\left[\frac{1}{2}(Z\bar{Z}+\bar{Z}Z)+\frac{1}{2}\alpha(Z\bar{Z}-\bar{Z}Z)\right]V=$$

$$\frac{1}{2}(1+\alpha)Z\bar{Z}V+\frac{1}{2}(1-\alpha)\bar{Z}ZV=$$

$$k^2 z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot$$

$$\left\{\frac{\alpha^2-1}{4}A\bar{A}-\frac{(\alpha+1)^3}{4}z^k\bar{z}^kA+\right.$$

$$\left(\frac{\alpha(\alpha^2-1)}{4}z^k\bar{z}^k+\frac{(1+\alpha)^2}{4}A\right)s+\frac{\alpha^2-1}{4}AA+$$

$$\left.\frac{\alpha^2-1}{4}(\alpha+1)Az^k\bar{z}^k-\frac{\alpha^2-1}{4}(A+\alpha z^k\bar{z}^k)s\right\}-$$

$$k^2 z^{k-1}\bar{z}^{k-1}sA^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot$$

$$\left\{\frac{1+\alpha}{2}A\bar{A}+\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2A(A-z^k\bar{z}^k)-\right.$$

$$\frac{1+\alpha}{2}\left[z^k\bar{z}^k+\frac{1+\alpha}{2}(A-z^k\bar{z}^k)\right]s+$$

$$\left.\frac{1-\alpha^2}{4}(A-s)(A-z^k\bar{z}^k)\right\}+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1+\alpha}{2}+1\right)k^2 z^{2k-1}\bar{z}^{2k-1}\cdot$$

$$(A-s)(\bar{A}-s)A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}$$

整理得

$$-\mathcal{L}_{\alpha}V=k^2 z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\frac{1+\alpha}{4}\cdot$$

$$((\alpha-1)A+(\alpha+3)Az^k\bar{z}^k+2As)+$$

$$k^2z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha-1}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}\frac{1+\alpha}{4}\cdot$$

$$(\alpha+3)Az^k\bar{z}^k(A\bar{A}-(A+\bar{A})s+s^2)-$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}\cdot s(1-s)$$

注意到

$$Az^k\bar{z}^k(A\bar{A}-(A+\bar{A})s+s^2)=$$
$$Az^k\bar{z}^k(A\bar{A}-z^k\bar{z}^ks-s+s^2)=$$
$$Az^k\bar{z}^kC-Az^k\bar{z}^ks(1-s)$$

和

$$(\alpha-1)A+2As=A((\alpha+1)s-(1-\alpha)(1-s))=$$
$$-A(-(\alpha+1)s+(1-\alpha)(1-s))$$

发现

$$\mathcal{L}_\alpha V=\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\left(-\frac{1+\alpha}{2}s+\frac{1-\alpha}{2}(1-s)\right)+$$
$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha}BC^{-\frac{1+\alpha}{2}-2}\left(\frac{1+\alpha}{2}+1\right)z^k\bar{z}^ks(1-s)+$$
$$\frac{1+\alpha}{2}k^2z^{k-1}\bar{z}^{k-1}A^{\alpha}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}C^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}s(1-s)$$

因为

$$C=(A\bar{A}-z^k\bar{z}^ks)=A\bar{A}(1-|p|^{2k}s)$$

$$B=\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}$$

所以

$$\mathcal{L}_\alpha V=\frac{1+\alpha}{2}k^2|z|^{2k-2}|A|^{-2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$
$$(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\left(-\frac{1+\alpha}{2}s+\frac{1-\alpha}{2}(1-s)\right)+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2\,|z|^{2k-2}\,|A|^{-2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\right)\cdot s(1-s)+$$

$$\frac{1+\alpha}{2}k^2\,|z|^{2k-2}\,|A|^{-2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\cdot s(1-s)\qquad(13.28)$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right]=\left(\frac{1-\alpha}{2}(1-s)-\frac{1+\alpha}{2}s\right)s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}$$

和式(13.28),有

$$W^{(\alpha)}_{\varepsilon,+}=\mathcal{L}_\alpha K^{(\alpha)}_{\varepsilon,+}=\frac{1}{8\pi^2k}\int_0^{1-\varepsilon}s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\mathcal{L}_\alpha V\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{8\pi^2k}\,\frac{1+\alpha}{2}k^2\,|z|^{2k-2}\,|A|^{-2}A^{-\frac{1+\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_0^{1-\varepsilon}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right]\cdot(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}+\right.$$

$$s^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}+$$

$$\left.s^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\cdot(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\right)\right\}\mathrm{d}s$$

所以

$$W^{(\alpha)}_{\varepsilon,+}=\frac{k}{(4\pi)^2}(1+\alpha)\,\frac{|z|^{2k-2}}{|A|^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{s^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\right\}\mathrm{d}s$$

同理可以得到

$$W_{\varepsilon,-}^{(\alpha)}=\frac{k}{(4\pi)^2}(1-\alpha)\frac{|z|^{2k-2}}{|A|^2}A^{\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{s^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{\frac{1-\alpha}{2}-1}\cdot\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\right\}\mathrm{d}s$$

由于 $W_{\varepsilon}^{(\alpha)}=W_{\varepsilon,+}^{(\alpha)}+W_{\varepsilon,-}^{(\alpha)}$，从而完成了公式(13.27) 的证明.

**定理 13.1** 取 $\alpha\in\mathscr{D}_k=\{\alpha:\alpha\in\mathbf{C},\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2,\cdots\}$，设 $F_{(w,s)}^{(\alpha)}$ 如式(12.47)、式(12.59)、式(12.60) 分别给出，则 $F_{(w,s)}^{(\alpha)}(z,t)$ 是算子 $\mathscr{L}_\alpha$ 的基本解，即

$$\mathscr{L}_\alpha F_{(w,s)}^{(\alpha)}(z,t)=\delta(z-w,t-s)\qquad(13.29)$$

其中 $\delta(z-w,t-s)$ 表示 $\delta(x-u,y-v,t-s)$，$z=(x,y)$，$w=(u,v)$.

**证明** 如注 13.1 所指出的，只须对$(w,s)=(1,0)$，$(w,s)=(0,0)$ 两种情形来证明式(13.29) 即可. 首先考虑 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 的情形. 此时，$F_{(1,0)}^{(\alpha)}$ 由式(12.47) 给出，即

$$F_{(1,0)}^{(\alpha)}=\frac{1}{8k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\left\{\int_0^1 s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+ps^{\frac{1}{k}}}{1-ps^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1 s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\frac{1+\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s\right\}$$

其中 $A=\frac{1}{2}(|z|^{2k}+1+\mathrm{i}t)$，$p=A^{-\frac{1}{k}}\overline{z}$，$z=x+\mathrm{i}y$. 当 $\varepsilon>0$ 时，令

$$F_{(1,0)}^{(\alpha,\varepsilon)}(z,t)=\frac{1}{8k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\left\{\int_0^{1-\varepsilon}s^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.(1-|p|^{2k}s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1+\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}{1-\overline{p}s^{\frac{1}{k}}}\mathrm{d}s+\cdots\right\}\qquad(13.30)$$

由命题 13.2 和引理 13.2 可知

$$F_{(1,0)}^{(\alpha,\varepsilon)} \to F_{(1,0)}^{(\alpha)}\text{（在 } L_{\mathrm{loc}}^1 \text{ 中，因此在 } \mathscr{D}' \text{ 中），当 } \varepsilon \to 0 \tag{13.31}$$

令

$$W_\varepsilon^{(\alpha)} = \mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha,\varepsilon)} \tag{13.32}$$

则

$$W_\varepsilon^{(\alpha)} \to \mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)}, \quad \text{在 } \mathscr{D}' \text{ 中}, \varepsilon \to 0 \tag{13.33}$$

因此需要证明

$$W_\varepsilon^{(\alpha)}(z,t) \to \delta(z-1,t), \quad \varepsilon \to 0 \tag{13.34}$$

即证对每个 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$，有

$$\int_{\mathbf{R}^3} W_\varepsilon^{(\alpha)} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \to f(1,0,0) \tag{13.35}$$

为证明式(13.35)，将对 $W_\varepsilon^{(\alpha)}$ 给出一个更简单的隐式形式，然后对一类特殊的函数

$$g_m = f_m(r,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad f_m \in C_0^\infty$$

证明式(13.35). 由于对每个 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$，Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_m(r,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ 收敛于 $f$，因此，式(13.35)对每个 $f \in C_0^\infty$ 成立. 下面来证明之.

由命题 13.3 可知

$$\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha,\varepsilon)}(z,t) = \frac{k}{4\pi^2} A^{-\frac{1-\alpha}{2}} \overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{|z|^{2k-2}}{|A|^2} \int_0^{1-\varepsilon} \cdot$$

$$\left\{ \frac{1+\alpha}{4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left[ \sigma^{\frac{1-\alpha}{2}} (1-\sigma)^{\frac{1+\alpha}{2}} (1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1} \frac{1+\sigma^{\frac{1}{k}} p}{1-\sigma^{\frac{1}{k}} p} \right] + \right.$$

$$\left. \frac{1-\alpha}{4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left[ \sigma^{\frac{1+\alpha}{2}} (1-\sigma)^{\frac{1-\alpha}{2}} (1-|p|^{2k}\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}-1} \frac{1+\sigma^{\frac{1}{k}} \overline{p}}{1-\sigma^{\frac{1}{k}} \overline{p}} \right] \right\} \mathrm{d}\sigma \tag{13.36}$$

因此

$$W_{\varepsilon}^{(\alpha)} = \frac{k}{2\pi}\frac{1+\alpha}{4}(1-\varepsilon)^{\frac{1-\alpha}{2}}\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}A^{\alpha}\,|\,z\,|^{2k-2}\cdot$$

$$(|\,A\,|^{2}-(1-\varepsilon)\,|\,z\,|^{2k})^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\,\frac{1}{2\pi}\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}+$$

$$\frac{k}{2\pi}\frac{1-\alpha}{4}(1-\varepsilon)^{\frac{1+\alpha}{2}}\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\alpha}\,|\,z\,|^{2k-2}\cdot$$

$$(|\,A\,|^{2}-(1-\varepsilon)\,|\,z\,|^{2k})^{-\frac{1-\alpha}{2}-1}\,\frac{1}{2\pi}\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}} \tag{13.37}$$

用极坐标 $z = re^{i\phi}$.

令 $f_m = g_m(r,t)e^{im\phi}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, g_m \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{+}\times\mathbf{R})$，暂时假设在 $\operatorname{supp}\{g_m\}$ 上 $r \neq 0$.

为了证明式(13.35)对 $f_m$ 成立，需要计算

$$I_{m,\varepsilon}^{+} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}\cdot e^{im\phi}\,d\phi \tag{13.38}$$

和

$$I_{m,\varepsilon}^{-} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}\cdot e^{im\phi}\,d\phi \tag{13.39}$$

因为 $p = A^{-\frac{1}{k}}\overline{z} = A^{-\frac{1}{k}}re^{-i\phi}, A = \frac{1}{2}(1+r^{2k}+it)$ 独立于 $\phi$，所以

$$I_{m,\varepsilon}^{+} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}A^{-\frac{1}{k}}re^{-i\phi}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}A^{-\frac{1}{k}}re^{-i\phi}}\cdot e^{im\phi}\,d\phi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z+a_{\varepsilon}(r,t)}{z-a_{\varepsilon}(r,t)}\cdot z^{m-1}\,dz$$

其中，$a_{\varepsilon}(r,t) = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}A^{-\frac{1}{k}}r$.

当 $\varepsilon > 0$ 时，$|\,a_{\varepsilon}\,| = (1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\,|\,p\,| < 1$. 由残数计算方法可得

$$I^{+}_{m,\varepsilon}=\begin{cases}2(a_{\varepsilon}(r,t))^{m}, & m>0\\ 1, & m=0\\ 0, & m<0\end{cases}\tag{13.40}$$

类似地

$$I^{-}_{m,\varepsilon}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{A}^{-\frac{1}{k}}re^{i\phi}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{A}^{\frac{1}{k}}re^{i\phi}}\cdot e^{im\phi}d\phi=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{1+\overline{a_{\varepsilon}(r,t)}z}{1-\overline{a_{\varepsilon}(r,t)}z}\cdot z^{m-1}dz$$

因此

$$I^{-}_{m,\varepsilon}=\begin{cases}0, & m>0\\ 1, & m=0\\ 2(\overline{a_{\varepsilon}(r,t)})^{-m}, & m<0\end{cases}\tag{13.41}$$

则

$$\int_{\mathbf{R}^3}W_{\varepsilon}f_m dxdydt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}W_{\varepsilon}g_m(r,t)e^{im\phi}rd\phi drdt=$$

$$\frac{k}{2\pi}\frac{1+\alpha}{4}(1-\varepsilon)^{\frac{1-\alpha}{2}}\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_{\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}A^{\alpha}(|A|^{2}-(1-\varepsilon)r^{2k})^{\frac{1+\alpha}{2}-1}I^{+}_{m,\varepsilon}g_m(r,t)r^{2k-1}drdt+$$

$$\frac{k}{2\pi}\frac{1-\alpha}{4}(1-\varepsilon)^{\frac{1+\alpha}{2}}\varepsilon^{\frac{1\ \alpha}{2}}\cdot$$

$$\int_{\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\overline{A}^{-\alpha}(|A|^{2}-(1-\varepsilon)r^{2k})^{-\frac{1\ \alpha}{2}-1}I^{-}_{m,\varepsilon}g_m(r,t)r^{2k-1}drdt\tag{13.42}$$

令

$$R=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(r^{2k}-1),\tau=\frac{t}{2\sqrt{\varepsilon}}$$

则

$$A=\frac{1}{2}(r^{2k}+1+it)=1+\sqrt{\varepsilon}(R+i\tau)$$

$$|A|^2-(1-\varepsilon)r^{2k}=\left(\frac{r^{2k}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\varepsilon r^{2k}=$$
$$\varepsilon(R^2+\tau^2+1+2\sqrt{\varepsilon}R)$$
$$I^{\pm}_{m,\varepsilon}(r,t)=I^{\pm}_{m,\varepsilon}((1+2\sqrt{\varepsilon}R)^{\frac{1}{2k}},\sqrt{\varepsilon}\tau)$$
$$g_m(r,t)=g_m((1+2\sqrt{\varepsilon}R)^{\frac{1}{2k}},\sqrt{\varepsilon}\tau)$$

代入式(13.42),有

$$\int_{\mathbf{R}^3}W_\varepsilon f_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{\pi}\frac{1+\alpha}{4}(1-\varepsilon)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty}(1+\sqrt{\varepsilon}(R+\mathrm{i}\tau))^{\alpha}\cdot$$
$$(1+2\sqrt{\varepsilon}R+R^2+\tau^2)^{\frac{1+\alpha}{2}-1}I^{+}_{m,\varepsilon}g_m\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau+$$
$$\frac{1}{\pi}\frac{1-\alpha}{4}(1+\varepsilon)^{\frac{1+\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty}[1+\sqrt{\varepsilon}(R-\mathrm{i}\tau)]^{-\alpha}\cdot$$
$$(1+2\sqrt{\varepsilon}R+R^2+\tau^2)^{-\frac{1-\alpha}{2}-1}I_{m,\varepsilon}g_m\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau \tag{13.43}$$

注意到

$$|1+\sqrt{\varepsilon}(R+\mathrm{i}\tau)|\leqslant 1+\sqrt{R^2+\tau^2}$$
$$|1+\sqrt{\varepsilon}(R+\mathrm{i}\tau)|\geqslant\sqrt{\varepsilon}R+1\geqslant\frac{1}{2}$$

且由于 $R\geqslant-\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$,故

$$|(1+\sqrt{\varepsilon}(R+\mathrm{i}\tau))^{\alpha}|\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{2\pi|\mathrm{Im}\alpha}\ |1+\sqrt{\varepsilon}(R+\mathrm{i}\tau)|^{\alpha'}\leqslant$$
$$C(1+\sqrt{R^2+\tau^2})^{\beta} \tag{13.44}$$

其中 $\beta=\max(\alpha',0)$,$\alpha'=\mathrm{Re}\alpha$. 进一步,当 $\varepsilon<\dfrac{1}{4}$ 时,有

$$|(1+2\sqrt{\varepsilon}R+R^2+\tau^2)|^{\frac{1+\alpha}{2}-1}\leqslant C(1+R^2+\tau^2)^{\frac{1+\alpha'}{2}-1} \tag{13.45}$$

注意到,如果用 $-\alpha$ 替换 $\alpha$,$-\tau$ 替换 $\tau$,式(13.44)、式(13.45)依然成

立. 由于 $g_m(r,t)\in C_0^\infty$, $|a_\varepsilon(r)|=|\overline{a_\varepsilon(r)}|=(1-\varepsilon)|p|<1$,结合式(13.40)、式(13.41) 可知 $|I_{m,\varepsilon}^\pm|\leqslant 2$. 从而式(13.43) 中等号右边的积分被 $C(1+R^2+\tau^2)^{-\frac{1+\alpha'}{2}-1}(1+\sqrt{R^2+\tau^2})^\beta$ 所控制. 注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+R^2+\tau^2)^{-\frac{1+\alpha'}{2}-1}(1+\sqrt{R^2+\tau^2})^\beta \mathrm{d}R\mathrm{d}\tau=$$

$$2\pi\int_0^{2\pi}(1+\rho^2)^{-\frac{1+\alpha'}{2}-1}(1+\rho)^\beta\rho\mathrm{d}\rho<+\infty$$

因为 $\rho\to\infty$ 时, $(1+\rho^2)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}(1+\rho)^\beta\rho\sim\rho^\lambda$, $\lambda=\max(\alpha',0)-\alpha'-1<-1$,结合控制收敛定理,从式(13.43) 推出

$$\int_{\mathbf{R}^3}W_\varepsilon f_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1+\alpha}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+R^2+\tau^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau I_{m,0}^+(1,0)g_m(1,0)+$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1-\alpha}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+R^2+\tau^2)^{-\frac{1-\alpha}{2}-1}\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau I_{m,0}^-(1,0)g_m(1,0)$$

一个简单的计算表明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+R^2+\tau^2)^{-\frac{1\pm\alpha}{2}-1}\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau=\frac{2\pi}{1\pm\alpha}$$

注意到 $a_\varepsilon(r,\tau)=A^{-\frac{1}{k}}r(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}$,所以 $a_0(1,0)=1$. 由式(13.40)、式(13.41) 可知

$$I_{m,0}^+(1,0)+I_{m,0}(1,0)=2,\quad \pm m=0,1,2,\cdots$$

所以当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\int_{\mathbf{R}^3}W_\varepsilon f_m\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\to g_m(1,0)=f_m(1,0)$$

因为 $z=1$ 可以推出 $r=1,\phi=0$,也就是

$$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)},f_m)=f_m(1,0)\tag{13.46}$$

对 $f_m(z,t)=g_m(r,t)\mathrm{e}^{im\phi}$ 成立,其中(,)表示分布 $\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}$ 作用于 $f_m$. 现在设 $f(z,t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$,且在 $f$ 的支集上 $|z|\neq 0$,以后将去掉这个附加条件.

令

$$g_m(r,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},t)\mathrm{d}\theta,\quad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{13.47}$$

和

$$f_N(z,t)=\sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_m(r,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{13.48}$$

因为在 $\mathrm{supp}\{f\}$ 上 $|z|\neq 0$,所以 $g_m\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$,从而 $f_N\in C_0^\infty$,由分部积分可知,对每个 $\beta\in I_+^2$,$l\in I_+$,任取 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 紧子集 $\Omega$,存在常数 $C_{\beta,l}(\Omega)$,

$$\sup_{\Omega}|\partial_r^{\beta_1}\partial_t^{\beta_2}g(r,t)|\leqslant C_{\beta,l}(\Omega)(1+|m|)^{-l},\quad \pm m=0,1,2,\cdots$$

所以,当 $N\to\infty$ 时,依 $C_0^\infty$ 的拓扑有

$$f_N\to f \tag{13.49}$$

则由式(13.46)、式(13.49)推出

$$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f)=(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},\lim_{N\to\infty}f_N)=$$
$$\lim_{N\to\infty}(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f_N)=$$
$$\lim_{N\to\infty}f_N(1,0)=f(1,0)$$

因此,只要 $f\in C_0^\infty$,且在 $\mathrm{supp}\{f\}$ 上 $z\neq 0$,就有

$$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f)=f(1,0) \tag{13.50}$$

为了去掉加在 $\mathrm{supp}\{f\}$ 上的条件,选取 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$,在 $\Omega_1$ 外部 $\varphi\equiv 0$,在 $\Omega_2$ 内 $\varphi\equiv 1$,其中 $\Omega_1$,$\Omega_2$ 为(1,0)的两个邻域,且 $\overline{\Omega}_2\subset\Omega_1$,在 $\Omega_1$ 内 $z\neq 0$,则每个 $f\in C_0^\infty$ 可被分解为

$$f=\varphi f+(1-\varphi)f=f_1+f_2$$

其中 $$f_1=\varphi f,\quad f_2=(1-\varphi)f$$

显然,在 $\mathrm{supp}\{f_1\}$ 上 $z\neq 0$,在 $\overline{\Omega}_2$ 上 $f_2\equiv 0$,$f_1\equiv f$,故

$$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f)=(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f_1)+(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f_2)=$$
$$f_1(1,0)+(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)},f_2)$$

从而如果$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)}, f_2) = 0$，则$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)}, f) = f(1,0)$.

下面证明$(\mathcal{L}_\alpha F_{(1,0)}^{(\alpha)}, f_2) = 0$.

实际上，由于$f_2 \in C_0^\infty$，且在$(1,0)$的邻域$\Omega_2$中$f_2 \equiv 0$，由引理13.1可知$(1,0)$在$\mathrm{supp}\{f_2\}$的外部，因此在$\mathrm{supp}\{f_2\}$上，$|1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p| \geqslant |1-p| \geqslant C_0 > 0$，从而$\left|\dfrac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}\right| \leqslant C_1$，

$\left|\dfrac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}\right| \leqslant C_1$，　在$\mathrm{supp}\{f_2\}$上，结合估计式(13.44)、式(13.45)，由控制收敛定理可知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}(W_\varepsilon^{(\alpha)}, f_2) = \\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1+\alpha}{4}(1-\varepsilon)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty}\left[1+\sqrt{\varepsilon}(R+\mathrm{i}\tau)\right]^\alpha \cdot\right. \\
&(1+2\sqrt{\varepsilon}R+R^2+\tau^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}-1}\int_0^{2\pi} f_2(1+2\sqrt{\varepsilon}R, \sqrt{\varepsilon}\tau)\cdot \\
&\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p(1+2\sqrt{\varepsilon}R, \sqrt{\varepsilon}\tau)}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p(1+2\sqrt{\varepsilon}R, \sqrt{\varepsilon}\tau)}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau + \\
&\frac{1-\alpha}{4\pi}(1-\varepsilon)^{\frac{1+\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty}(1+\sqrt{\varepsilon}(R-\mathrm{i}\tau))^{-\alpha}\cdot \\
&\left[1+2\sqrt{\varepsilon}R+R^2+\tau^2\right]^{-\frac{1-\alpha}{2}-1}\int_0^{2\pi} f_2(1+2\sqrt{\varepsilon}R, \sqrt{\varepsilon}\tau)\cdot \\
&\left.\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}(1+2\sqrt{\varepsilon}R, \sqrt{\varepsilon}\tau)}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}(1+2\sqrt{\varepsilon}R, \sqrt{\varepsilon}\tau)}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau\right\} = \\
&\frac{1+\alpha}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+R^2+\tau^2)^{\frac{1+\alpha}{2}-1}\cdot \\
&\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left(f_2\cdot\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}p}\right)(1+2R\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}\tau)\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau + \\
&\frac{1-\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+R^2+\tau^2)^{-\frac{1-\alpha}{2}-1}\cdot
\end{aligned}
$$

$$\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left(f_2\cdot\frac{1+(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{k}}\overline{p}}\right)(1+2\sqrt{\varepsilon}R\sqrt{\varepsilon\tau})\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau=0$$

这里注意到在(1,0)的邻域$\Omega_1$上$f_2\equiv 0$,因此,上面两个极限都为零,故式(13.34)成立,因此当$-1<\mathrm{Re}\alpha<1$时,式(13.29)对$w\neq 0$的情形成立.

下面考虑$|\mathrm{Re}\alpha|\geqslant 1,\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2,\cdots$的情形.

令

$$\mathscr{A}=\left\{\alpha:\alpha\in\mathbf{C},\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1,m=0,1,2\cdots\right\}$$

对任意$f\in C_0^\infty$,令

$$g(\alpha)=(F_{(1,0)}^{(\alpha)},f)=\iiint_{\mathbf{R}^3}F_{(1,0)}^{(\alpha)}(z,t)f(z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,$$

则$g(\alpha)$定义在$\mathscr{A}$上有意义,下面将证明$g(\alpha)$在$\mathscr{A}$上为解析函数.为此,令

$$g_\varepsilon(\alpha)=\int_{(|z|^{2k}-1)^2+t^2\geqslant\varepsilon}F_{(1,0)}^{(\alpha)}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\quad \alpha\in\mathscr{A},\varepsilon>0$$

式(12.47)、式(12.59)和式(12.60)表明,对任意的$\varepsilon>0$,$g_\varepsilon(\alpha)$在$\mathscr{A}$上解析.

由引理13.2可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}g_\varepsilon(\alpha)=g(\alpha),\quad 在\ \mathscr{A}\ 中逐点地成立\tag{13.51}$$

进一步,由注13.3和式(13.25)、式(13.26)可知:对$\mathscr{A}$的每个紧子集$\mathscr{B}$,存在常数$C=C(f,\mathscr{B})$,使得

$$|g_\varepsilon(\alpha)|\leqslant\int_{\mathrm{supp}(f)}|F_{(1,0)}^{(\alpha)}||f|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leqslant C(f,\mathscr{B}),\quad \alpha\in\mathscr{B},\varepsilon>0$$

即$\mathscr{B}$上的解析函数族$\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$在$\mathscr{B}$上一致有界.注意到式(13.51),且$\mathscr{B}$为$\mathscr{A}$的任一个紧子集,由Vitali定理和Weierstrass定理,$g(\alpha)$为$\mathscr{A}$上的解析函数.

令

$$h(\alpha)=(F^{(\alpha)}_{(1,0)},(\mathcal{L}_\alpha)^t f)$$

因为$(\mathcal{L}_\alpha)^t=\mathcal{L}_{-\alpha}$,所以

$$(\mathcal{L}_\alpha)^t f=(\mathcal{L}_{-\alpha})f=-\frac{1}{2}(Z\overline{Z}+\overline{Z}Z)f+\alpha\cdot\frac{1}{2}[Z,\overline{Z}]f=$$

$$f_1+\alpha f_2$$

其中 $f_1=-\frac{1}{2}(Z\overline{Z}+\overline{Z}Z)f$, $f_2=\frac{1}{2}[Z,\overline{Z}]f$. 注意到

$$h(\alpha)=(F^{(\alpha)}_{(1,0)},f_1)+\alpha(F^{(\alpha)}_{(1,0)},f_2)$$

因为 $f_1,f_2\in C_0^\infty$,所以 $h(\alpha)$ 为 $\mathcal{A}$ 上的解析函数. 另外,如上所证,当 $-1<\mathrm{Re}\alpha<1$ 时,$h(\alpha)=(\mathcal{L}_\alpha F^{(\alpha)}_{(1,0)},f)=f(1,0)$,因此由唯一延拓定理可知,只要 $f\in C_0^\infty$,则 $(\mathcal{L}_\alpha F^{(\alpha)}_{(1,0)},f)=h(\alpha)=f(1,0)$ 对所有的 $\alpha\in\mathcal{A}$ 成立. 从而证明了 $\mathcal{L}_\alpha F^{(\alpha)}_{(1,0)}=\delta(z-1,t)$ 对 $a\in\mathcal{A}$ 成立.

最后,考虑 $(w,s)=(0,0)$ 的情形. 由式(13.24)可知

$$F^{(\alpha)}_{(0,0)}(z,t)=\frac{1}{2k\pi}\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\frac{1}{(|z|^{4k}+t^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{|z|^{2k}+\mathrm{i}t}{|z|^{2k}-\mathrm{i}t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

令

$$F_\varepsilon(z,t)=\frac{1}{2k\pi}\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\frac{1}{[(|z|^{2k}+\varepsilon)^2+t^2]^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\left(\frac{|z|^{2k}+\varepsilon+\mathrm{i}t}{|z|^{2k}+\varepsilon-\mathrm{i}t}\right)^{\frac{\alpha}{2}},\quad \varepsilon>0$$

则

$$\mathcal{L}_\alpha F_\varepsilon(z,t)=\frac{\varepsilon k}{\pi}\frac{(1-\alpha^2)}{\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\frac{|z|^{2k-2}}{[(|z|^{2k}+\varepsilon)^2+t^2]^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{|z|^{2k}+\varepsilon+\mathrm{i}t}{|z|^{2k}+\varepsilon-\mathrm{i}t}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

取 $f\in C_0^\infty$,可得

$$(\mathcal{L}_\alpha F_\varepsilon(z,t),f)=\frac{\varepsilon k(1-\alpha^2)}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\int\frac{r^{2k-2}}{((r^{2k}+\varepsilon)^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\left(\frac{r^{2k}+\varepsilon+\mathrm{i}t}{r^{2k}+\varepsilon-\mathrm{i}t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} f(re^{\mathrm{i}\phi},t)r\mathrm{d}r\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi$$

令 $r^{2k}=\varepsilon R, t=\varepsilon\tau$，有

$$(\mathcal{L}_\alpha F_\varepsilon(z,t),f)=\frac{(1-\alpha^2)}{4\pi\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{[(R+1)^2+\tau^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\left(\frac{R+1+\mathrm{i}\tau}{R+1-\mathrm{i}\tau}\right)^{\frac{\alpha}{2}} f((\varepsilon R)^{\frac{1}{2k}}e^{\mathrm{i}\phi},\varepsilon\tau)\rightarrow$$

$$f(0,0)\frac{(1-\alpha^2)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{[(R+1)^2+\tau^2]^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R+1+\mathrm{i}\tau}{R+1-\mathrm{i}\tau}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}R\mathrm{d}\tau=$$

$$f(0,0)\frac{(1-\alpha^2)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\infty}\rho^{-2}\mathrm{d}\rho\right)e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$f(0,0)\frac{(1-\alpha^2)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

注意到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\alpha\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta=2\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}}[\cos(1+\alpha)\theta+\cos(1-\alpha)\theta]\mathrm{d}\theta=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\theta}{1-\alpha^2}$$

故对每个 $f\in C_0^\infty$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathcal{L}_\alpha F_\varepsilon(z,t),f)=f(0,0)$$

从而在 $L^1_{\mathrm{loc}}$ 中 $F_\varepsilon\to F^{(\alpha)}_{(0,0)}$，因此在 $\mathscr{D}'$ 中，只要 $\alpha\neq 2m+1, m=0,\pm 1,\cdots$，则 $\mathcal{L}_\alpha F^{(\alpha)}_{(0,0)}=\delta(z,t)$. 综上所述，当 $\pm\alpha\neq\frac{2m}{k}+1, m=0,1,2,\cdots$ 时，有

$$\mathcal{L}_\alpha F^{(\alpha)}_{(w,s)}=\delta(z-w,t-s)$$

定理 13.1 证明完成.

## 13.3　基本解的实解析性

本节将由式(12.51)证明下述定理.

**定理 13.2**　基本解 $F_{(w,s)}^{(\alpha)}(z,t)$ 在 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\backslash\{(w,s)\}$ 中是实解析的,其中 $\alpha\in\mathscr{A}=\{\alpha:\alpha\in\mathbf{C},\pm\alpha\neq\dfrac{2m}{k}+1,m=0,1,2,\cdots\}$.

**证明**　首先考虑 $-1<\mathrm{Re}\alpha<1$ 的情形. 由式(12.51)可知

$$F_{(w,s)}^{(\alpha)}(z,t)=\frac{1}{4k\pi^2}A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\cdot$$

$$\int_0^1\int_0^1\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\cdot$$

$$\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma}{(1-\overline{p}s^{\frac{1}{k}})(1-p\sigma^{\frac{1}{k}})\prod_{l=1}^{k}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}\mid p\mid^{2k}(\sigma s)^{\frac{1}{k}})}$$

上式中的项 $\prod(\cdot)$ 在 $k=1$ 时不出现. 对 $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}$,令

$$f_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)=(1-\sigma^{\frac{1}{k}}\lambda)^{-1}(1-s^{\frac{1}{k}}\mu)^{-1}\Big[\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}\sigma^{\frac{1}{k}}\lambda s^{\frac{1}{k}}\mu)\Big]^{1}\tag{13.52}$$

则可以断言:对任意 $p_0\in\mathbf{C}$,如果 $|p_0|\leqslant1$,且 $p_0\neq1$,则存在与 $(\sigma,s)$ 无关的常数 $\delta_0>0,C_0>0$,

(1) $f_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)$ 为 $\Omega_{\delta_0}$ 上的全纯函数,其中

$$\Omega_{\delta_0}=\{(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2,\ |\lambda-p_0|+|\mu-\overline{p}_0|<\delta_0\}$$

(2) 任取 $(\sigma,s)\in[0,1]\times[0,1]$,在 $\Omega_{\delta_0}$ 上,$|f_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)|\leqslant C_0$.

事实上,$f_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)=\dfrac{1}{g_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)}$,其中

$$g_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)=(1-\sigma^{\frac{1}{k}}\lambda)(1-s^{\frac{1}{k}}\mu)\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}(1-\sigma^{\frac{1}{k}}s^{\frac{1}{k}}\lambda\mu)\tag{13.53}$$

显然 $g_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)$ 关于$(\lambda,\mu)$ 全纯，因此只须证：存在常数 $d_0>0$，$\delta_0>0$，使得 $|g_{(\sigma,s)}|\geqslant d_0$ 在 $\Omega_{\delta_0}$ 上成立，其中 $d_0,\delta_0$ 独立于$(\sigma,s)\in[0,1]\times[0,1]$.

为此给出下述估计：对$(\sigma,s)\in[0,1]\times[0,1]$，如果 $|p_0|<1$，则

$$|g_{(\sigma,s)}(p_0,\overline{p}_0)|\geqslant(1-|p_0|)^{k+1} \tag{13.54}$$

就像 $p_0\neq 1$，$|p_0|=1$ 的情形，注意到对任意的复数 $z=re^{i\phi}$，均有

$$|1-z|=|1-re^{i\phi}|=[(1-r\cos\phi)^2+r^2\sin^2\phi]^{\frac{1}{2}}=$$
$$(1+r^2-2r\cos\phi)^{\frac{1}{2}}=[\sin^2\phi+(r-\cos\phi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

因此

$$\begin{aligned}&|1-z|\geqslant|\sin\phi|=\left|\mathrm{Im}\frac{z}{|z|}\right|, && \phi\neq\pi \text{ 且 } 0<\phi<2\pi\\ &|1-z|\geqslant 1, && \phi=\pi\end{aligned}$$

由上可知

$$|1-\sigma^{\frac{1}{k}}p_0|\geqslant\begin{cases}|\mathrm{Im}p_0|, & |p_0|=1,p_0\neq\pm1\\ 1, & p_0=-1\end{cases}$$

$$|1-s^{\frac{1}{k}}p_0|\geqslant\begin{cases}|\mathrm{Im}\overline{p}_0|=|\mathrm{Im}p_0|, & |p_0|=1,p_0\neq\pm1\\ 1, & p_0=-1\end{cases}$$

$$|1-e^{i\frac{2l\pi}{k}}\sigma^{\frac{1}{k}}s^{\frac{1}{k}}p_0\overline{p}_0|\geqslant$$
$$\begin{cases}\left|\sin\dfrac{2l\pi}{k}\right|, & 1\leqslant l\leqslant k-1 \text{ 且 } \dfrac{2l}{k}\neq1,k>1\\ 1, & \dfrac{2l}{k}=1,k>1\end{cases}$$

因此

$$|g_{(\sigma,s)}(p_0,\overline{p}_0)|\geqslant$$

$$
\begin{cases}
(1-|p_0|)^{k+1}, & |p_0|<1 \\
|\operatorname{Im}p_0|^2 \prod\limits_{1\leqslant l\leqslant k-1, l\neq \frac{k}{2}} \left|\sin \frac{2l}{k}\pi\right| > 0, & |p_0|=1, p_0\neq \pm 1 \\
\prod\limits_{1\leqslant l\leqslant k-1, l=\frac{k}{2}} \left|\sin\frac{2l\pi}{k}\right| > 0, & p_0=-1
\end{cases}
$$

结合式(13.54)说明,存在独立于$(\sigma,s)\in[0,1]\times[0,1]$的常数$d(p_0)>0$,使得只要$|p_0|\leqslant 1, p_0\neq 1$,就有

$$
|g_{(\sigma,s)}(p_0,\overline{p}_0)|\geqslant 2d_0 \tag{13.55}
$$

对$(\sigma,s)\in[0,1]\times[0,1]$成立.

令$G(\lambda,\mu)=\min\limits_{0\leqslant\sigma\leqslant 1, 0\leqslant s\leqslant 1}|g_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)|$,由式(13.55)可知

$$
G(p_0,\overline{p}_0)\geqslant 2d_0
$$

因为$G(\lambda,\mu)$连续,所以存在点$(p_0,\overline{p}_0)$的一个邻域$\Omega_{\delta_0}=\{(\lambda,\mu)\in \mathbf{C}^2, |\lambda-p_0|+|\mu-\overline{p}_0|<\delta_0\}$,使得对任意$(\lambda,\mu)\in\Omega_{\delta_0}$,有$G(\lambda,\mu)\geqslant d_0$,因此

$$
|g_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)|\geqslant d_0 \tag{13.56}
$$

对$(\lambda,\mu)\in\Omega_{\delta_0}$,$(\sigma,s)\in[0,1]\times[0,1]$成立,这表明(1)和(2)成立.

进一步注意到$f_{(\sigma,s)}=\dfrac{1}{g_{(\sigma,s)}}$,结合式(13.53)、式(13.56),可知结论(2)对$f_{(\sigma,s)}$的导数也成立.

令

$$
F(\lambda,\mu)=\int_0^1\int_0^1 \sigma^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}s^{-\frac{1-\alpha}{2}}\cdot (1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}f_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\lambda \tag{13.57}
$$

注意

$$
\int_0^1\int_0^1\left|\sigma^{-\frac{1+\alpha}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha}{2}}s^{-\frac{1-\alpha}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\leqslant
$$

$$
\int_0^1\int_0^1\sigma^{-\frac{1+\alpha'}{2}}(1-\sigma)^{-\frac{1-\alpha'}{2}}s^{-\frac{1-\alpha'}{2}}(1-s)^{-\frac{1+\alpha'}{2}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s=
$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1+\alpha'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha'}{2}\right)\right]^2 < +\infty,\quad \alpha' \leqslant \mathrm{Re}\alpha,\ |\alpha'| < 1$$

因此可改变式(13.57)等号右边积分及推导的顺序以验证 $F(\lambda,\mu)$ 的 Cauchy-Riemann 条件,因此由解析函数 $f_{(\sigma,s)}(\lambda,\mu)$ 在 $\Omega_{\delta_0}$ 中满足 Cauchy-Riemann 条件, 知 $F(\lambda,\mu)$ 在 $\Omega_{\delta_0}$ 中也满足 Cauchy-Riemann 条件. 这说明 $F(\lambda,\mu)$ 在 $\Omega_{\delta_0}$ 中全纯. 换句话说,只要证明了 $|p_0| \leqslant 1, p_0 \neq 1, F(\lambda,\mu)$ 在 $(p'_0,\bar{p}_0)$ 的某个邻域中是全纯的.

令

$$G(x,y,t) = F(p(x,y,t),\bar{p}(x,y,t))$$

其中

$$p(x,y,t) = \left\{\frac{1}{2}[(x^2+y^2)^k + (u^2+v^2)^k + \mathrm{i}(t-s)]\right\}^{-\frac{1}{k}} \cdot (x-\mathrm{i}y)(u+\mathrm{i}v)$$

$$\bar{p}(x,y,t) = \overline{p(x,y,t)} = \left\{\frac{1}{2}[(x^2+y^2)^k + (u^2+v^2)^k - \mathrm{i}(t-s)]\right\}^{-\frac{1}{k}} \cdot (x+\mathrm{i}y)(u-\mathrm{i}v)$$

因为 $p(x,y,t)$ 和 $\bar{p}(x,y,t)$ 在 $(x_0,y_0,t_0) \in \mathbf{R}^3 \backslash (u,v,s)$ 的一个邻域中实解析,且由引理 13.1 知 $p(x_0,y_0,t_0) \neq 1$, $|p(x_0,y_0,t_0)| \leqslant 1$,所以 $G(x,y,t)$ 在 $(x_0,y_0,t_0)$ 的某个邻域中为实解析的. 注意到

$$F^{(\alpha)}_{(w,s)}(z,t) = F^{(\alpha)}_{(u,v,s)}(x,y,t) = \frac{1}{4k\pi^2}\frac{A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}G(x,y,t)$$

且当 $(x_0,y_0,t_0) \neq (u,v,s)$ 时, $A^{-\frac{1-\alpha}{2}}\bar{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}$ 在 $(x_0,y_0,t_0)$ 附近为实解析的,从而此时 $F^{(\alpha)}_{(u,v,s)}(x,y,t)$ 在 $(x_0,y_0,t_0)$ 附近也为实解析的,故而在 $|\mathrm{Re}\alpha| < 1$ 时,定理结论成立.

现在考虑 $|\operatorname{Re}\alpha| \geqslant 1$ 和 $\alpha \in \mathscr{A}$ 的情形.

如在第十二章中的证明过程，利用回路积分，需要对公式(12.50)中的积分进行正则化.

当 $\operatorname{Re}\alpha > -1, \alpha \in \mathscr{A}$ 时，令

$$E_{(w,s)}^{(\alpha),+}(z,t) = \frac{-kA^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{16\pi^2\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1+\alpha}{2}\ \frac{1-\alpha}{2}k\right)\pi}}{\sin\frac{1-\alpha}{2}k\pi\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi} \cdot$$

$$\int_1^{(0^+)}\mathrm{d}\xi\int_0^{(1^+)}\mathrm{d}\eta\Big[\xi^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\xi^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\eta^{\frac{1+\alpha}{2}k-1} \cdot$$

$$(1-\eta^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1}{(1-p\xi)(1-\overline{p}\eta)\prod\limits_{1\leqslant l\leqslant k-1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}\xi\eta p\overline{p})}\Big] \tag{13.58}$$

当 $\operatorname{Re}\alpha < 1, \alpha \in \mathscr{A}$ 时，令

$$E_{(w,s)}^{(\alpha),-}(z,t) = \frac{-kA^{-\frac{1-\alpha}{2}}\overline{A}^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{16\pi^2\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1-\alpha}{2}\ \frac{1+\alpha}{2}k\right)\pi}}{\sin\frac{1+\alpha}{2}k\pi\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi} \cdot$$

$$\int_0^{(1^+)}\mathrm{d}\xi\int_1^{(0^+)}\mathrm{d}\eta\Big[\xi^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\xi^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\eta^{\frac{1+\alpha}{2}k-1} \cdot$$

$$(1-\eta^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\frac{1}{(1-p\xi)(1-\overline{p}\eta)\prod\limits_{1\leqslant l\leqslant k-1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}p\overline{p}\xi\eta)}\Big] \tag{13.59}$$

如第十二、十三章的证明一样，可以证明：当 $|\operatorname{Re}\alpha| < 1$ 时，$E_{(w,s)}^{(\alpha),+} = E_{(w,s)}^{(\alpha),-} = F_{(w,s)}^{(\alpha)}$，且 $E_{(w,s)}^{(\alpha),\pm} \in L_{\mathrm{loc}}^1 \cap C^\infty(\mathbf{R}^3 \backslash (w,s))$. 也可证明：任取 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$，有 $g^\pm(\alpha) = (E_{(w,s)}^{(\alpha),\pm}, f)$ 在 $\mathscr{A}$ 上解析. 由解析函数的唯一性定理，知在 $\mathscr{D}'$ 中 $E_{(w,s)}^{(\alpha)} = F_{(w,s)}^{(\alpha)}$，然后由一个标准的讨论推出，在 $C^\infty(\mathbf{R}^3 \backslash (w,s))$ 中也成立.

因此只要证 $E_{(w,s)}^{(\alpha),\pm}(z,t)$ 在 $\mathbf{R}^3 \backslash (w,s)$ 中是实解析的就可以了. 注意到 $E_{(w,s)}^{(\alpha),-}(z,t) = E_{(\overline{w},-s)}^{(-\alpha),+}(\overline{z},-t)$，故只讨论 $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$ 的情形.

令

$$g_{(\xi,\eta)}(\lambda,\mu)=(1-\xi\lambda)(1-\eta\mu)\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}\xi\eta\mid p\mid^2)\tag{13.60}$$

设$(z_0,t_0)=(x_0,y_0,t_0)\neq(u,v,s)=(w,s)$，记 $p_0=p_{(w,s)}(z_0,t_0)$，$\overline{p}_0=\overline{p}_{(w,s)}(z_0,t_0)$. 就像对 $|\mathrm{Re}\alpha|<1$ 时的处理，想要证明

$$|g_{(\xi,\eta)}(p_0,\overline{p}_0)|\geqslant 2d_0>0\tag{13.61}$$

其中 $d_0$ 独立于$(\xi,\eta)$，$(\xi,\eta)\in\gamma_1\times\gamma_2$，$\gamma_1,\gamma_2$ 为式(13.58)中积分所取的回路.

为证明式(13.61)，选取回路 $\gamma_1,\gamma_2$ 如下：

$$\gamma_1=C_{\varepsilon_0}(0)\cup\{\xi:\varepsilon\leqslant\xi\leqslant 1\}$$

$$C_{\varepsilon_0}(0)=\{\xi\in\mathbf{C},\ |\xi|=\varepsilon_0\}$$

$$\gamma_2=C_{\varepsilon_0}(1)\cup\{\eta:0\leqslant\eta\leqslant 1-\varepsilon\}$$

$$C_{\varepsilon_0}(1)=\{\eta\in\mathbf{C},\ |\eta-1|=\varepsilon_0\}$$

其中

$$\varepsilon_0=\min\left\{\frac{1}{2}\mid 1-p_0\mid,\frac{1}{3}\left|\sin\frac{2l}{k}\pi\right|,1\leqslant l\leqslant k-1,l\neq\frac{k}{2}\right\}$$

则

$$|1-\xi p_0|\geqslant\begin{cases}1-\varepsilon\geqslant\dfrac{1}{2}, & \xi\in C_{\varepsilon_0}(0)\\ C(p_0)>0, & \varepsilon_0\leqslant\xi\leqslant 1(\text{见情形 }|\mathrm{Re}\alpha|<1)\end{cases}$$

$$|1-\eta\overline{p}_0|\geqslant$$

$$\begin{cases}|1-\overline{p}_0||(1-\eta)p_0|\geqslant|1-\overline{p}_0|-\varepsilon_0\geqslant\dfrac{1}{2}\mid 1-p_0\mid, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\eta\in C_{\varepsilon_0}(1) & \\ C(p_0)>0,\quad 0\leqslant\eta\leqslant 1-\varepsilon_0(\text{见情形 }|\mathrm{Re}\alpha|<1) & \end{cases}$$

对 $\xi\in[\varepsilon_0,1]$ 和 $\eta\in C_{\varepsilon_0}(1)$，有

$$|1-\xi\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}|p_0|^2|\geqslant 1-2\varepsilon_0\geqslant\frac{1}{3},\quad\xi\in C_{\varepsilon_0}(0),\eta\in\gamma_2$$

$$|1-\xi\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}|p_0|^2|\geqslant$$

$$|1-\xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\pi}{k}}|p_0|^2|-|1-\eta||p_0|^2\geqslant$$

$$\begin{cases} \left|\sin\dfrac{2l\pi}{k}\right| - \varepsilon_0 \geqslant \dfrac{2}{3}\left|\sin\dfrac{2l\pi}{k}\right|, & l \neq \dfrac{k}{2} \\ 1-\varepsilon_0 \geqslant \dfrac{1}{3}, & l = \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

对 $\xi \in [\varepsilon_0, 1]$，$\eta \in [0, 1-\varepsilon_0]$，有

$$|1 - \xi\eta e^{i\frac{2l\pi}{k}} | p_0 |^2 | \geqslant C(p_0) > 0$$

以上的一系列估计表明式(13.61)成立，从而当 $|\lambda - p_0| + |\mu - \overline{p}_0| < \delta_0$ 时，

$$G(\lambda,\mu) = \min_{\xi\in\gamma_1, \eta\in\gamma_2} |g_{(\xi,\eta)}(\lambda,\mu)| > d_0 \tag{13.62}$$

其中，$\delta_0$ 独立于$(\lambda,\mu)$和$(\xi,\eta)$，$\delta_0$ 足够小. 像 $|\mathrm{Re}\alpha| < 1$ 的情形一样，为了检验Cauchy-Riemann条件，需要下列估计：对 $\alpha' = \mathrm{Re}\alpha > 1$，$\alpha \in \mathscr{A}$，有

$$\begin{aligned} &\int_1^{0^+} |d\xi| \int_0^{1^+} |d\eta| \left|\xi^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\xi^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \eta^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\eta^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right| \leqslant \\ &C(\alpha)\left(\int_{\varepsilon_0}^1 \xi^{\frac{1-\alpha'}{2}k-1}(1-\xi^k)^{-\frac{1-\alpha'}{2}} d\xi + 2\pi\varepsilon_0^{\frac{1-\alpha'}{2}k}(1-\varepsilon_0^k)^{-\frac{1-\alpha'}{2}}\right)\cdot \\ &\left(\int_0^{1-\varepsilon^0} \eta^{\frac{1-\alpha'}{2}k-1}(1-\eta^k)^{-\frac{1+\alpha'}{2}} d\eta + \int_0^{2\pi} |1+\varepsilon_0 e^{i\phi}|^{\frac{1-\alpha'}{2}k-1} d\phi \cdot \varepsilon_0^{\frac{1-\alpha'}{2}}\right) \leqslant \\ &C_0(\alpha) < +\infty \end{aligned} \tag{13.63}$$

对 $(\lambda,\mu) \in \Omega_{\delta_0} = \{(\lambda,\mu): |\lambda - p_0| + |\mu - \overline{p}_0| < \delta_0\}$，令

$$\begin{aligned} E(\lambda,\mu) = \int_1^{0^+} d\xi \int_0^{1^+} d\eta \Big[&\xi^{\frac{1-\alpha}{2}k-1}(1-\xi^k)^{-\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \\ &\eta^{\frac{1+\alpha}{2}k-1}(1-\eta^k)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1}{g_{(\xi,\eta)}(\lambda,\mu)}\Big] \end{aligned}$$

如对 $|\mathrm{Re}\alpha| < 1$ 时的处理，由式(13.62)和式(13.63)可知，对每一个 $\alpha \in \mathscr{A}$，$E^{(\alpha),\pm}_{(w,s)}(z,t)$ 在$(\mathbf{C}\times\mathbf{R})\backslash\{w,s\}$中实解析，完成定理13.2证明.

# 参考文献

[1] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. New York: Dover Publications, Inc., 1965.

[2] Beals R, Greiner P. Calculus on Heisenberg manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1988.

[3] Berestycki H, Capuzzo Dolcetta I, Nirenberg L. Problèmes elliptiques indéfinits et théorèms de Liouville non-linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris, Séris I, 1993(317):945 - 950.

[4] Berestycki H, Capuzzo Dolcetta I, Nirenberg L. Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1994(414):59 - 78.

[5] Birindelli I, Capuzzo Dolcetta I, Cutri A. Indefinite semi-linear equations on the Heisenberg groug: a priori bounds and existence. Comm. in P. D. E., 1998, 23(7/8):1123 - 1157.

[6] Birindelli I, Capuzzo Dolcetta I, Cutri A. Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg group. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. NonLinéaite, 1997 (14):295 - 308.

[7] Bonfiglioli A, Lanconelli E. Liouville-type theorem for real sub-Laplacians. Manuscripta Math., 2001(105):111 - 124.

[8] Bony J M. Principle du Maximun, Inegalité dé Harnack et unicité du problème de Cauchy pour less operateurs

elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fouries Grenobles, 1969,19(1):277 - 304.

[9] Capogana L, Danielli D, Garofalo N. An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations. Comm. P. D. E. , 1993(18):1765 - 1794.

[10] Chavel I. Eigenvalues in Riemannian geometry. New York: Academic Press, 1984.

[11] Chazarain J, Piriou A. Introduction to the theory for linear partial differential equations. Amsterdan-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1981.

[12] 陈庆益.一般线性偏微分方程.北京:高等教育出版社,1987.

[13] 陈维桓.微分流形初步.北京:高等教育出版社,1998.

[14] Cui Shangbin. Some nessary conditions for local solvable LPDE, J. Differential Equations, 1993,106(1).

[15] Dixmier J. Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents, 1, Bull. Soc. Math. France, 1957(85):325 - 388.

[16] Egorov Yu V. On a class of pseudo-differential operators. Mat. Sb. , 1979(79):59 - 77.

[17] Egorov Yu V. Linear differential equation of principle type. New York and London: Consultants Bureau, 1986.

[18] Folland G B. 偏微分方程引论.齐民友,等,译.上海:上海高等教育出版社,1988.

[19] Folland G B. Harmonic analysis in phase space. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.

[20] Folland G B, Stein E M. Estimates for the $\bar{\partial}_b$- complex and analysis on the Heisenberg group. Comm. Pure Appl. Math. , 1974(27):429 - 522.

[21] Folland G B, Stein E M. Hardy space on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982: Math. Notes 28.

[22] Furutani K, Sagami K, Otsuki N. The spectrum of the Laplacian on a certain nilpotent group. Comm. P. D. E., 1993 (18):533 - 555.

[23] Gårding L. 分析学中的若干问题及其历史. 李大潜,周仲良,译. 北京:高等教育出版社,2001.

[24] Geller D. Fourier analysis on the Heisenberg group. J. Funct. Anal., 1980(26):205 - 254.

[25] Geller D. Liouville's theorem for homogeneous groups, Comm. P. D. E., 1983,8(15):1665 - 1677.

[26] Greiner P C. On the second order hypoelliptic differential operators and the ∂-Neuman problem. Aspects of Math. Comples Analysis, 1990:134 - 142.

[27] Greiner P C, Stein E M. On the solvability of some differential operators of type $\square_b$. Proc. Seminar on several complex variable, Cortona, Italy, 1976 - 1977:106 - 165.

[28] Greiner P C, Stein E M. Estimate for the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Mathematical Notes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1977.

[29] Hamidi A E, Laptev G G. Nonexistence of solutions to systems of higher-order semilinear inequalities in cone-like domains. Electronic J. Differential Equations, 2002:1 - 19.

[30] Helffer B, Nourrigat J. Characterization des operators hypoelliptiques homogenes invariant a gauche sur un group de Lie nilpotent gradue. Comm. P. D. E., 1979,4(8):899 - 958.

[31] Hile G N, Yeh R Z. Inequalities for eigenvalues of the biharmonic operator. Pacific J. Math., 1984(112):115 - 133.

[32] Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. Vol. Ⅲ, Ⅳ. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[33] Jerison D S. The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian

on the Heisenberg group I., J. Funct. Anal., 1981, 43 (1): 97 - 142.

[34] Laptev G G. Nonexistence results for higher-order evolution partial differential inequalities. Proc. Amer. Math. Soc., 2002(131): 415 - 423.

[35] 罗学波.广义齐次微分算子的亚椭圆性条件.中国学术期刊文摘,1995(2).

[36] Luo Xuebo. Liouville's theorem for homogeneous differential operators. Comm. in PDE, 1997, 22(11/12): 1837 - 1848.

[37] Luo Xuebo. Global analyticity for quasi-homogeneous linear partial diferential equations, Comm. in P. D. E., 1998, 23(7/8): 1171 - 1179.

[38] Luo Xuebo. Removable singularities theorems for solutions of quasi-homogeneous hypoelliptic equations // Proc. Conf. Partial Differential Equations and Their Applications. Singapore: World Scientific, 1999: 200 - 210.

[39] Luo Xuebo, He Chunxiong. Hypoelliptic convolution operators and Rockland condition. Science in China, 1996, 39 (10): 1025 - 1033.

[40] Luo Xuebo, Niu Pengcheng. On the eigenvalues of the operator sum of square of vector fields. Chinese Science Bulletin, 1998, 43(3): 263.

[41] Luo Xuebo, Niu Pengcheng. The spectrum of the Kohn-Laplacian. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 1999, 20(2): 281 - 287.

[42] 罗学波,钮鹏程. Hesenberg 群上 Folland-Stein 算子的 Dirichlet 特征值问题.数学物理学报,1997(17 增刊).

[43] Luo Xubo, Zheng Zhujun. Polynomial solutions of quasi-homogeneous differential equations. Science in China: Series

A, 2001,44(9):1148 - 1155.

[44] Nagel A, Stein E M. Lecture on pseudo-differential operators. Princeton: Princeton Univ. Press, 1979:7 - 8.

[45] Niu Pengcheng, Zhang Huiqing. Payne-Polya-Weinberger type inequalities for eigenvalues of nonelliptic operators. Pacific Journal of Mathematics, 2003,208(2):325 - 345.

[46] Payne L E. Polya G, Weinberger H F. On the ratio of consecutive eigenvalues. J. Math. Phys. , 1956(35):289 - 298.

[47] Reed M, Simon B. Methods of modern mathematical physics: Part 1. New York: Academic Press, 1975.

[48] Rothschild L P. A remark on hypoellipticity of homogeneous invariant differential operators on nilpotent Lie groups. Comm. P. D. E. , 1983,8(15):1679 - 1682.

[49] Rothschild L P, Stein E M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. , 1976(137):247 - 320.

[50] Stein E M. Harmonic analysis, real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

[51] Taylor M E. Noncommutative microlocal analysis: Part 1. Memoirs of the American Mathematical Society, 1984 (52):313.

[52] Taylor M E. Noncommutative harmonic analysis. Math. Surveys and Monographs, 22, Amer. Math. Soc. , Providence, RI, 1986.

[53] Taylor M E. Partial differential equations v. 1: basic theory. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[54] Titchmarsh E C. Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford: Oxford Univ. Press, 1937.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□
□□=□□□□□□□□□□□□
□□=262
SS□=11842062
DX□=
□□□□=2007.4
□□□=□□□□□□□□□

Heisenberg

Heisenberg

1.1

1.2

1.3 Heisenberg

Heisenberg

2.1 Heisenberg

2.2

2.3 Plancherel

Heisenberg Lie

3.1 Lie

3.2

Kohn-Laplace

4.1 Hermite

4.2

4.3

4.4

Kohn-Laplace

5.1

5.2

5.3 Kohn-Laplace

6.1

6.2

6.3□□□□□□□□□□□□
6.4 □□□LPDO
6.5□□□□□□□□□□□
6.6□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□LPDO
7.1□□□□□
7.2□□□□
7.3□□□□□□□
□□□ □□□□□□□□□Liouville□□□
8.1 LPDO□Liouville□□□□□□□□□
8.2□□□□□□□□□□Liouville□□□
8.3 □□□LPDO□Liouville□□
8.4□□□□□□□□□□□□□
□□□ □□□□□□□□□□□□Liouville□□□
9.1□□□□□□□□□
9.2□□□□□□□□□□□□
9.3 □□□□□□Liouville□□□
□□□□□□□□□□□□LPDO
10.1 □□□□
10.2 □□□LPDO□□□□□
□□□□ □□□LPDO□□□□□□□□□□
11.1 □□□□□
11.2 □□□k□□□□ek□x□ξ□
11.3 □□□□□□□
11.4 □-□□□□□□□
□□□□□Greiner□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□
12.1□□1□Reα□1□□□
12.2 □Reα□≥1□±α≠□+1, m=0, 1, 2, …□
□□□□ □□□□□□□□□□□

13.1 □α□K□α□□□□□□

13.2 □□Reα□□1□□□□□□□□

13.3 □□□□□□□□

□□□□